INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

y a la metodología de las Ciencias deductivas

alfred tarski

TERCERA EDICIÓN

(a) $[2, 3\frac{1}{2}] \cup [3, 5] = [2, 5]$,

(b) $[-1, 2] \cup [0, 3] = [0, 2]$,

(c) $[-2, 8] \cap [3, 7] = [-2, 8]$,

(d) $[2, 4\frac{1}{2}] \cap [3, 5] = [2, 3]$?

Espasa-Calpe s.a.

NUEVA CIENCIA NUEVA TÉCNICA

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA



ALFRED TARSKI

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Y A LA METODOLOGÍA DE LAS CIENCIAS DEDUCTIVAS

TRADUCCIÓN DE

T. R. BACHILLER y J. R. FUENTES

TERCERA EDICIÓN

REVISADA CONFORME A LA TERCERA INGLES

O. CHATEAUBRIAND y M. A. DICKMANN

ESPASA-CALPE, S. A.
MADRID
1977

Impreso en España
Printed in Spain

Depósito legal: M. 839—1977

ISBN 84—239—6480—9

Talleres gráficos de la Editorial Espasa-Calpe, S. A.
Carretera de Irún, km. 12,200. Madrid-34

ÍNDICE GENERAL

Páginas

Páginas

PREFACIO DE LA EDICIÓN INGLESA

Este libro es una edición parcialmente modificada y extendida de mi libro *Sobre la Lógica Matemática y el Método Deductivo*, que apareció primeramente en polaco, en 1936, y luego, en 1937, en una exacta traducción alemana (bajo el título: *Einführung in die mathematische Logik und die Methodologie der Mathematik*). En su forma original fue concebido como un libro científico popular; su propósito fue presentar al lego educado —de modo en el que pudieran combinarse la exactitud científica con la mayor inteligibilidad posible— una idea clara de la poderosa tendencia del pensamiento contemporáneo que se halla concentrada alrededor de la lógica moderna. Esta tendencia parte originalmente de la tarea algo limitada de solidificar los fundamentos de la matemática. En su presente fase, sin embargo, tiene objetivos mucho más amplios. Porque trata de crear un aparato conceptual unificado que proveería de una base común a todo el conocimiento humano. Además, tiende a perfeccionar y aguzar el método deductivo, que en algunas ciencias es considerado como el único medio permitido para establecer verdades, y realmente en todo dominio de la actividad intelectual es por lo menos un instrumento auxiliar indispensable para derivar conclusiones de suposiciones aceptadas.

La acogida que tuvieron las ediciones polaca y alemana, y especialmente algunas sugestiones hechas por críticos, dieron origen a la idea de hacer de la nueva edición no meramente un libro científico popular, sino también un texto en el que pudiera basarse algún curso universitario elemental sobre lógica y metodolo-

gía de las ciencias deductivas. El experimento parecía atractivo, en vista de la carencia de libros de texto elementales apropiados en esta materia.

Para llevar a cabo el experimento, fue necesario hacer varios cambios en el libro.

Algunas cuestiones y nociones muy fundamentales fueron enteramente pasadas por alto o superficialmente tocadas en las ediciones previas, sea a causa de su carácter más técnico, sea para soslayar puntos que se prestan a controversia. Como ejemplos pueden citarse ciertos tópicos, como la diferencia entre el uso de algunas nociones lógicas en el desarrollo sistemático de la lógica, por una parte, y en el lenguaje cotidiano, por otra; el método general usado para la verificación de las leyes del cálculo proposicional, la necesidad de una distinción clara entre las palabras y sus nombres, los conceptos de clase universal y de clase nula, las nociones fundamentales del cálculo de relaciones, y, finalmente, la concepción de la metodología como una ciencia general de las ciencias. En la presente edición son tratados todos estos tópicos (aunque no todos en forma igualmente detallada), pues me parece que su falta constituye una laguna esencial en cualquier libro de lógica moderna. Consecuentemente, los capítulos de la primera parte del libro, o parte general, han sido más o menos ampliados; en particular el capítulo segundo, que está dedicado al cálculo proposicional, contiene mucho material nuevo. He agregado también muchos nuevos ejercicios a estos capítulos, y he aumentado el número de indicaciones históricas.

Mientras en las ediciones previas el uso de símbolos especiales fue reducido al mínimo, considero necesario en la presente edición familiarizar al lector con los elementos del simbolismo lógico. Sin embargo, en la práctica este simbolismo se ha usado en forma muy restringida y ha sido limitado en su mayor parte a ejercicios.

En las ediciones previas los ejemplos relativos a las consideraciones generales y abstractas fueron tomados principalmente de la matemática de la escuela secundaria; porque era mi opinión, y continúa siéndola, que la matemática elemental y especialmente el álgebra, a causa de la simplicidad de sus conceptos y de la uniformidad de sus métodos de inferencia, es particularmente apropiada para ejemplificar varios fenómenos fundamentales de naturaleza lógica y metodológica. Sin embargo, en la presente

edición, y en especial en los pasajes agregados, tomo ejemplos más frecuentemente de otros dominios, con preferencia de la vida diaria.

Independientemente de esos agregados, he vuelto a escribir ciertas secciones cuyo dominio resultaba algo dificultoso para los estudiantes.

Las características esenciales del libro permanecen inalteradas. El prefacio de la edición original, la mayor parte del cual se halla reimpreso en páginas siguientes, dará al lector una idea sobre el carácter general del libro. Quizá convenga, sin embargo, señalar explícitamente lo que no debe esperarse de éste.

En primer lugar, el libro no contiene una presentación sistemática y estrictamente deductiva de la lógica; es obvio que una presentación tal no está dentro del alcance de un libro de texto elemental. Mi intención fue originariamente incluir, en esta edición, un capítulo adicional titulado *La lógica como ciencia deductiva*, el cual, como ilustración de las observaciones metodológicas generales que figuran en el Capítulo VI, hubiera esbozado un desarrollo sistemático de algunas partes elementales de la lógica. Por varias razones esta intención no pudo realizarse; espero que en cierto modo se vea compensada esta omisión por el buen número de ejercicios nuevos sobre este tema que se han incluido en el Capítulo citado.

En segundo lugar, aparte de dos pasajes más bien cortos, el libro no da información acerca de la lógica aristotélica tradicional, y no contiene materiales tomados de ella. Pero creo que el espacio dedicado aquí a la lógica tradicional corresponde bastante bien al escaso papel a que esa lógica ha sido reducida en la ciencia moderna; creo también que esta opinión es compartida por la mayoría de los lógicos contemporáneos.

Y, finalmente, el libro no trata de problemas relativos a las llamada lógica y metodología de las ciencias empíricas. Debo decir que me inclino a dudar que haya una «lógica de las ciencias empíricas» especial, como opuesta a la lógica en general o a la «lógica de las ciencias deductivas» (por lo menos en lo que concierne a la palabra «lógica» tal como se usa en este libro —es decir, como el nombre de una disciplina que analiza el significado de los conceptos comunes a todas las ciencias y que establece las leyes generales

por las que se gobiernan los conceptos)—. Pero éste es un problema más bien de palabra que de hechos. De cualquier modo, la metodología de la ciencia empírica constituye un importante dominio de la investigación científica. El conocimiento de la lógica es, por supuesto, valioso para el estudio de esa metodología, como lo es también en el caso de cualquier otra disciplina. Debe admitirse, sin embargo, que los conceptos y los métodos lógicos no han hallado, hasta el presente, aplicaciones específicas o fértiles en aquel dominio. Y es al menos posible que esta situación no sea consecuencia meramente del estado en que se hallan en la actualidad las investigaciones metodológicas. Ella proviene, quizá, de la circunstancia de que, para los fines de un tratamiento metodológico adecuado, una ciencia empírica puede considerarse, no solamente como una teoría científica —esto es, como un sistema de afirmaciones dispuestas de acuerdo con ciertas reglas— sino más bien como una estructura compleja compuesta en parte por afirmaciones del tipo mencionado, y en parte por actividades humanas. Agréguese que, en sorprendente oposición al desarrollo de las ciencias empíricas en sí mismas, la metodología de estas ciencias a duras penas puede jactarse de algunos resultados precisos comparables con los de aquéllas a pesar de los grandes esfuerzos que han sido realizados. Incluso la tarea preliminar de clarificación de conceptos que intervienen en este dominio, no ha sido aún llevada a cabo satisfactoriamente. Por tanto, un curso de metodología de las ciencias empíricas debe tener un carácter muy diferente del de un curso de lógica, y debe estar dedicado en gran parte a la valoración y la crítica de tentativas indecisas y de esfuerzos infructuosos. Por estas y otras razones, veo escasa justificación racional para combinar la discusión de la lógica con la metodología de las ciencias empíricas en un mismo curso.

Algunas observaciones todavía en lo que se refiere al orden del libro y a su uso como texto universitario.

El libro está dividido en dos partes. La primera presenta una introducción general a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas; la segunda muestra por medio de un ejemplo concreto el tipo de aplicación que la lógica y la metodología encuentran en la construcción de las teorías matemáticas, y así da una oportunidad para asimilar y profundizar el conocimiento adquirido

en la primera parte. Cada capítulo está completado por ejercicios convenientes. En las notas al pie se han consignado breves indicaciones históricas.

Los pasajes, e incluso las secciones enteras, que se hallan comprendidos por asteriscos «*», tanto al comenzar como al finalizar, contienen material más dificultoso o presuponen familiaridad con otros pasajes que contienen material de tal índole; éstos pueden omitirse sin comprometer la integridad de las partes subsiguientes. Esto mismo se aplica a los ejercicios cuyos números están precedidos por asteriscos.

Me parece que el libro contiene material suficiente para un curso de un año completo. Sin embargo, su ordenamiento permite que se lo use con el mismo provecho en cursos de medio año. Si se lo usa como texto para un curso de lógica en un departamento de filosofía durante medio año, sugiero el estudio completo de la primera parte, inclusive los pasajes de mayor dificultad, omitiendo enteramente la segunda parte. Si el libro se usa en un curso de medio año en un departamento de matemática —por ejemplo, sobre fundamentos de la matemática— sugiero el estudio de ambas partes del libro, con omisión de los pasajes dificultosos.

En todo caso, deseo recalcar la importancia de resolver los ejercicios en forma completa y cuidadosa; porque ellos no sólo facilitan la asimilación de los conceptos y de los principios discutidos, sino que tocan muchos problemas, para cuya discusión no se ha presentado oportunidad en el texto.

Me sentiría muy satisfecho si este libro contribuyera a la amplia difusión del conocimiento lógico. El curso de los acontecimientos históricos ha reunido en este país a los más eminentes representantes de la lógica contemporánea, y ha creado de este modo condiciones especialmente favorables para el desarrollo del pensamiento lógico. Estas condiciones favorables pueden, por supuesto, ser fácilmente desequilibradas por efecto de otros factores más poderosos. Es obvio que el futuro de la lógica, así como el de toda ciencia teórica, depende esencialmente de la normalización de las relaciones políticas y sociales de la humanidad, y, por tanto, depende de factores que escapan al control de los estudiosos profesionales. No tengo ilusiones acerca de que el pensamiento lógico, en particular, tenga un efecto verdaderamente esen-

cial en el proceso de normalización de las relaciones humanas; pero creo que la amplia difusión del conocimiento de la lógica puede contribuir positivamente a la aceleración de ese proceso. Pues, por una parte, al dar a los conceptos un significado preciso y uniforme en su propio campo y al insistir en la necesidad de precisión y uniformidad semejantes en todo otro terreno, la lógica conduce a la posibilidad de un mejor entendimiento entre aquellos que tienen el deseo de lograrlo. Y, por otra parte, al perfeccionar y agudizar los instrumentos del pensamiento, ella desarrolla el sentido crítico de los hombres, y en consecuencia hace menos probable que éstos se vean extraviados por todos los pseudorazonamientos a los cuales se hallan incesantemente expuestos en la actualidad en varias partes del mundo.

Dejo expresión de mi más agradecido reconocimiento al doctor O. Helmer, quien llevó a cabo la traducción al inglés de la edición alemana. Deseo también expresar mi más cálida gratitud al doctor A. Hofstadter, al señor L. K. Krader, al profesor E. Nagel, al profesor W. V. Quine, al señor M. G. White, y especialmente al doctor J. C. C. McKinsey y al doctor P. P. Wiener, quienes fueron insustituibles en sus consejos y en su asistencia, mientras yo preparaba la edición inglesa. También agradezco mucho al señor K. L. Arrow su ayuda en la lectura de las pruebas.

Alfred Tarski.

Universidad de Harvard, septiembre de 1940.

Tanto la segunda edición (1946) como la presente tercera edición de este libro son, esencialmente, reproducciones fotográficas de la primera edición norteamericana, y no ha sido posible introducir en ellas ningún cambio en gran escala. Sin embargo, se han corregido errores de imprenta y se han mejorado algunos detalles. En particular, en la presente edición se han agregado muchos ejercicios nuevos que dan al lector mayor oportunidad de trabajar con el simbolismo lógico. Además, la *Guía Bibliográfica*

incluida al final del libro ha sido completamente revisada y puesta al día. Deseo agradecer a lectores y críticos por sus útiles observaciones; estoy especialmente agradecido a la profesora LOUISE H. LIM (CHIN) por su asistencia en la preparación de la segunda edición, y a la señorita JUDITH NG y al profesor W. B. PITT por su asistencia en conexión con la presente edición. El profesor L. HENKIN ha hecho muchas sugerencias valiosas que han sido incorporadas al nuevo texto de la *Guía Bibliográfica.*

A. T.

Universidad de California, Berkeley, agosto de 1964.

DEL PREFACIO DE LA EDICIÓN ORIGINAL

En la opinión de muchos legos, la matemática es ya hoy una ciencia muerta: después de haber alcanzado un alto grado de desarrollo, se ha petrificado en una rígida perfección. Es ésta una forma completamente errónea de ver la situación; hay muy pocos dominios de la investigación científica que estén pasando en la actualidad por un período de desarrollo tan intenso como la matemática. Además, este desarrollo es extraordinariamente variado: la matemática está extendiendo su dominio en todas las direcciones posibles, se halla creciendo en alto, en ancho y en profundidad. Se halla creciendo en alto, pues sobre el terreno de sus viejas teorías, que llevan cientos cuando no miles de años de desarrollo, aparecen nuevos y nuevos problemas, y siempre se logran resultados más perfectos. Ella crece en ancho, porque sus métodos penetran en otras ramas de las ciencias, mientras su dominio de investigación abarca en modo creciente clases más generales de fenómenos, y siempre se incluyen nuevas teorías en el amplio círculo de las disciplinas matemáticas. Y, finalmente, ella crece en profundidad puesto que sus fundamentos se arraigan cada vez más firmemente, sus métodos se perfeccionan y sus principios se estabilizan.

Ha sido mi intención, en este libro, dar a aquellos lectores que se interesan por la matemática contemporánea, sin tener una relación activa con ella, una idea muy general sobre aquella tercera dirección del desarrollo matemático, esto es, su crecimiento en profundidad. Mi objetivo es familiarizar al lector con los conceptos más importantes de una disciplina que se conoce como lógica

matemática y que ha sido creada para establecer con mayor firmeza y profundidad los fundamentos de la matemática; esta disciplina, a pesar de su breve existencia de un siglo escaso, ha alcanzado ya un alto grado de perfección y desempeña actualmente un papel tal en la totalidad de nuestro conocimiento, que trasciende con amplitud los límites que originariamente se le asignaron. Ha sido mi intención mostrar que los conceptos de la lógica penetran el cuerpo íntegro de la matemática, que ellos comprenden como casos especiales a todos los conceptos específicamente matemáticos, y que las leyes lógicas se aplican constantemente —en forma consciente o inconsciente— en los razonamientos matemáticos. Para finalizar, he tratado de presentar los principios más importantes que intervienen en la construcción de las teorías matemáticas —principios que constituyen el material de otra disciplina, la metodología de la matemática— y mostrar cómo comienzan a usarse aquellos principios en la práctica.

No ha sido fácil llevar a cabo la totalidad de este plan a través de un libro relativamente pequeño, y sin presuponer de parte del lector algún conocimiento matemático especializado o algún entrenamiento en razonamientos de carácter abstracto. A lo largo de todo el libro se ha intentado combinar la mayor inteligibilidad posible con la concisión necesaria, mediante un cuidado continuo en evitar errores o inexactitudes científicas. Se ha usado un lenguaje que se desvía lo menos posible del lenguaje de la vida diaria. Se ha hecho muy poco uso del simbolismo lógico especializado, aunque este simbolismo es un inapreciable instrumento que nos permite combinar la concisión con la precisión, alejando en alto grado la posibilidad de ambigüedades y malentendidos, y es por tanto de esencial utilidad en todas las consideraciones más sutiles. La idea de un tratamiento sistemático ha sido abandonada desde el principio. Entre la abundancia de cuestiones que se presentan, sólo unas pocas han podido discutirse en detalle, otras sólo pudieron ser tratadas superficialmente, mientras que hay otras aún que han debido pasarse enteramente por alto, con la conciencia de que la selección de los tópicos discutidos presentaría inevitablemente un carácter más o menos arbitrario. En aquellos casos en los cuales la ciencia contemporánea no ha tomado aún una posición definida y ofrece varias soluciones posibles e igualmente

correctas, no era posible presentar objetivamente todos los puntos de vista conocidos. Ha sido necesario decidirse en favor de alguno de ellos. Al tomar tales decisiones he tenido cuidado primeramente no de que resultaran conformes a mis inclinaciones personales, sino más bien de elegir un método de solución que fuera lo más simple posible y que se prestara a sí mismo a un modo popular de presentación.

No tengo la ilusión de haber obviado completamente estas y otras dificultades.

PRIMERA PARTE

ELEMENTOS DE LÓGICA
MÉTODO DEDUCTIVO

I

SOBRE EL USO DE VARIABLES

1. Constantes y variables

Toda teoría científica es un sistema de proposiciones[1] que se aceptan como verdaderas y que pueden llamarse LEYES o ENUNCIADOS AFIRMADOS o simplemente ASERCIONES. En la matemática estas aserciones se siguen unas de otras en un orden definido de acuerdo con ciertos principios que serán discutidos en detalle en el Capítulo VI, y por lo general van acompañadas por consideraciones destinadas a establecer su validez. Consideraciones de este tipo se llaman PRUEBAS (O DEMOSTRACIONES), y las aserciones establecidas por ellas reciben el nombre de TEOREMAS.

Entre las expresiones y símbolos que intervienen en los teoremas y demostraciones matemáticos, distinguimos CONSTANTES y VARIABLES.

En la aritmética, por ejemplo, intervienen constantes tales como *«número»*[2], *«cero»* («0»), *«uno»* («1»), *«suma»* («+»), y muchas

---

[1] En la presente versión castellana se ha usado sistemáticamente la terminología «proposición» y «función proposicional» como traducción de «sentence» y «sentential function». Fuera del contexto de este libro, dicha terminología podría dar lugar a ciertos malentendidos. Por «proposición» se entiende aquí simplemente «oración» y no, como es común en algunos textos, un ente abstracto que es el significado expresado por una oración. Esta última interpretación estaría en conflicto con la posición filosófica del autor. Tampoco debe confundirse el uso de «función proposicional» en este libro con el uso de «propositional function» en muchos textos en inglés. Para este último el autor reserva la palabra «propiedad». En lugar de «proposición» y «función proposicional» podrían usarse también los pares «sentencia» y «función sentencial» o «enunciado» y «función enunciativa». *(O. C. y M. D.)*

[2] Por «aritmética» entendemos aquí la parte de la matemática que se ocupa de la investigación de las propiedades generales de números, de las relaciones entre núme-

otras. Cada uno de estos términos tiene un significado fijo que permanece inalterado en el curso de las consideraciones.

Como variables utilizamos ordinariamente letras aisladas, en la aritmética por ejemplo, las letras minúsculas del alfabeto latino: «*a*», «*b*», «*c*», ..., «*x*», «*y*», «*z*». En oposición a las constantes, las variables no poseen significado propio. Así, la pregunta:

¿Tiene cero tal o cual propiedad?

por ejemplo:

¿Es cero un número entero?

se puede contestar siempre afirmativa o negativamente; la respuesta puede ser verdadera o falsa, pero en todo caso tendrá sentido. En cambio, una pregunta que afecta a x, como por ejemplo:

¿Es x un número entero?

no puede contestarse significativamente.

En algunos textos de matemática elemental, especialmente los menos recientes, ocasionalmente se encuentran formulaciones que sugieren que es posible atribuir significado independiente a las variables. Se dice, en efecto, que los símbolos «*x*», «*y*», ... designan ciertos números o magnitudes, aunque no «números constantes» (como los designados por las constantes «0», «1», ...), sino los llamados «números variables» o también, «magnitudes variables». Afirmaciones de este tipo tienen su origen en un grave malentendido. El «número variable» x no podría poseer ninguna propiedad determinada; no podría ser, por ejemplo, ni positivo, ni negativo, ni igual a cero; las propiedades de tal número variarían de caso en caso: dicho número sería positivo unas veces, negativo otras, y otras igual a cero. Pero tales objetos no los encontramos en el

---

ros y de las operaciones con ellos. Con frecuencia se usa el término «álgebra» en lugar de «aritmética», particularmente en la enseñanza secundaria. Hemos preferido la palabra «aritmética» porque, en matemática superior, el término «álgebra» se reserva para la teoría mucho más especial de las ecuaciones algebraicas. (En los últimos años el término «álgebra» ha tomado un sentido más amplio, que aún es, sin embargo, diferente del de «aritmética».) El término «número» se usará en este texto con el sentido que en matemática se asigna habitualmente al término «número real»; es decir, comprende a los números enteros y a los fraccionarios, a los racionales y a los irracionales, a los positivos y a los negativos, pero no a los números imaginarios y complejos.

mundo en modo alguno; su existencia contradice a las leyes fundamentales de nuestro pensamiento. A la clasificación de los símbolos en constantes y variables, no corresponde, pues, una clasificación análoga de los números.

2. Expresiones que contienen variables: funciones proposicionales y designativas

En vista de que las variables no poseen significado por sí mismas, frases como:

x es un número entero

no constituyen proposición alguna, no obstante adoptar la forma gramatical de éstas; no expresan una afirmación determinada y no pueden ser confirmadas ni refutadas. De la expresión:

x es un número entero

se obtiene una proposición solamente cuando se reemplaza en ella «x» por una constante que designe un número determinado. Si en vez de «x» ponemos en ella, por ejemplo, el símbolo «1», resultará una proposición verdadera; si, por el contrario, ponemos «$^1/_2$», tendremos una proposición falsa. Una expresión como ésta, que contiene variables y que al reemplazar éstas por constantes determinadas se convierte en una proposición, recibe el nombre de FUNCIÓN PROPOSICIONAL. Los matemáticos no utilizan esta expresión a gusto, porque están acostumbrados a usar el término «función» con otro significado. Con más frecuencia se aplica en este sentido la expresión «CONDICIÓN»; regularmente, el matemático designa por FÓRMULAS a las funciones proposicionales y proposiciones compuestas exclusivamente por símbolos matemáticos (sin palabras del lenguaje corriente), como, por ejemplo:

$$x + y = 5.$$

En lugar de «función proposicional», a veces diremos simplemente «proposición», aunque sólo en aquellos casos en que no pueda deslizarse ningún malentendido. El papel de las variables

se ha comparado acertadamente muchas veces con el de los espacios vacíos de los cuestionarios: así como un cuestionario no tiene un contenido determinado hasta no llenar sus huecos, tampoco una función proposicional se convierte en una proposición hasta no insertar constantes en los lugares de las variables. Si como resultado de reemplazar constantes en lugar de variables (y naturalmente, de constantes iguales en lugar de variables iguales) se obtiene una proposición verdadera, diremos que los objetos designados por esas constantes SATISFACEN la función proposicional dada. Por ejemplo, los números 1, 2 y $2\,^1/_2$ satisfacen la función proposicional:

$$x < 3,$$

y en cambio los números 3, 4 y $4\,^1/_2$ no la satisfacen.

Junto a las funciones proposicionales, merecen también atención otras expresiones en las que figuran asimismo variables, las llamadas FUNCIONES DESIGNATIVAS O DESCRIPTIVAS: éstas son expresiones que se transforman en designaciones de objetos al sustituir las variables por constantes. Por ejemplo:

$$2x + 1$$

es una función designativa, pues se obtiene la designación de un determinado número (por ejemplo, el número 5), si en ella reemplazamos «x» por una constante arbitraria que designe un número (por ejemplo, «2»).

Entre las funciones designativas que aparecen en la aritmética, tenemos en particular las llamadas expresiones algebraicas que están compuestas por variables, constantes numéricas y los símbolos de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, como, por ejemplo:

$$x - y, \qquad \frac{x+1}{y+2}, \qquad 2 \cdot (x + y - z).$$

Por el contrario, las ecuaciones algebraicas, es decir, las fórmulas compuestas por dos expresiones algebraicas ligadas por el símbolo «=», son funciones proposicionales. Como es sabido, respecto de las ecuaciones se ha creado en la matemática una terminología

particular: a las variables que aparecen en una ecuación se las llama incógnitas y a los números que satisfacen a la ecuación, raíces de ésta. Por ejemplo, en la ecuación:

$$x^2 + 6 = 5x$$

la variable «x» es una incógnita y los números 2 y 3 las raíces de la ecuación.

De las variables «x», «y», ... empleadas en aritmética, se dice que ESTÁN EN LUGAR DE DESIGNACIONES DE NÚMEROS, o bien que los números son VALORES de esas variables. Con ello se quiere decir aproximadamente lo que sigue: una función proposicional que contiene los símbolos «x», «y», ..., se transforma en una proposición si dichos símbolos se reemplazan por constantes que designan números (y no por expresiones que designan operaciones con números, relaciones entre números, o bien objetos que están fuera del campo de la aritmética, como configuraciones geométricas, animales, plantas, etc.). Análogamente, las variables que aparecen en geometría están en lugar de designaciones de puntos y de figuras geométricas. También puede decirse que las funciones designativas que se presentan en aritmética están en lugar de designaciones de números. A veces se dice simplemente que los símbolos «x», «y», ... y las funciones designativas construidas con ellos, denotan números o son designaciones de números, pero esto es solamente una terminología abreviada.

3. Formación de proposiciones por medio de variables. Proposiciones universales y existenciales

Aparte del reemplazo de variables por constantes hay aún otro camino por el cual pueden obtenerse proposiciones a partir de funciones proposicionales. Consideremos la fórmula:

$$x + y = y + x.$$

Se trata de una función proposicional que contiene dos variables, «x» e «y» y que es satisfecha por cualquier par arbitrario de

números; si colocamos constantes numéricas cualesquiera en lugar de «x» y de «y», obtenemos siempre una fórmula verdadera. Expresamos brevemente este hecho del siguiente modo:

para todo número x y todo número y, $x + y = y + x$.

La expresión así obtenida es ya una proposición genuina y, más aún, proposición verdadera; reconocemos en ella a una de las leyes fundamentales de la aritmética, la llamada ley conmutativa de la adición. Los más importantes teoremas de la matemática se formulan análogamente, en especial, todas las llamadas PROPOSICIONES UNIVERSALES O PROPOSICIONES DE CARÁCTER UNIVERSAL, las cuales afirman que objetos arbitrarios de cierta categoría (por ejemplo: en el caso de la aritmética, números arbitrarios) tienen tal y tal propiedad. Debe notarse que en la formulación de proposiciones universales se omite a menudo la frase «*para objetos* (o *números*) *cualesquiera* x, y, ...» y ella debe insertarse mentalmente; así, por ejemplo, la ley conmutativa de la suma puede darse simplemente en la siguiente forma:

$$x + y = y + x.$$

Ésta es una costumbre bastante difundida, a la que también nos atendremos nosotros en el curso de las consideraciones posteriores.

Consideremos ahora la función proposicional:

$$x > y + 1.$$

Esta fórmula no es satisfecha por cualquier par de números: en el caso de colocar, por ejemplo, «3» en lugar de «x» y «4» en lugar de «y», se obtiene una falsedad:

$$3 > 4 + 1.$$

Por consiguiente, si decimos:

para números cualesquiera x e y, $x > y + 1$,

obtenemos una proposición indudablemente significativa, pero, evidentemente, falsa. Por otra parte, existen pares de números que

satisfacen la función proposicional considerada: por ejemplo, el resultado de reemplazar «x» por «4» e «y» por «2» es la fórmula verdadera:

$$4 > 2 + 1.$$

Esto se puede expresar brevemente como sigue:

para algunos números x e y, $x > y + 1$,

o utilizando una forma de uso frecuente:

existen números x e y tales que $x > y + 1$.

Las expresiones indicadas son proposiciones verdaderas; son ejemplos de PROPOSICIONES EXISTENCIALES O PROPOSICIONES DE CARÁCTER EXISTENCIAL, que afirman la existencia de objetos (números, por ejemplo), con una determinada propiedad.

Con ayuda de los métodos descritos se pueden formar proposiciones partiendo de cualquier función proposicional dada; sin embargo, el obtener una proposición verdadera o falsa depende del contenido de la función proposicional. El ejemplo siguiente puede servir de ilustración. La fórmula:

$$x = x + 1$$

no es satisfecha por ningún número; por lo tanto, si le anteponemos las palabras «*para cualquier número x*» o «*existe un número x tal que*», llegaremos siempre a una proposición falsa.

En oposición, tanto a las proposiciones universales como a las existenciales, las proposiciones que no contienen variables, como por ejemplo:

$$3 + 2 = 2 + 3,$$

serán llamadas PROPOSICIONES SINGULARES. Esta clasificación no es exhaustiva, pues existen muchas proposiciones que no se pueden encuadrar en ninguna de las tres categorías indicadas. Como ejemplo tenemos la siguiente proposición:

para números cualesquiera x e y, existe un número z tal que
$$x = y + z.$$

Las proposiciones de este tipo son a veces llamadas PROPOSICIONES EXISTENCIALES CONDICIONADAS (para diferenciarlas de las proposiciones existenciales consideradas hasta ahora, a las que podemos llamar EXISTENCIALES ABSOLUTAS): ellas afirman la existencia de números poseedores de una cierta propiedad, pero bajo la condición que ciertos otros números existan.

4. Cuantificadores universal y existencial; variables libres y ligadas

Frases tales como:

para todo x y todo y, ...

y

existen x, y, ... tales que

se llaman CUANTIFICADORES; la primera frase es un CUANTIFICADOR UNIVERSAL y la última es un CUANTIFICADOR EXISTENCIAL. Los cuantificadores se conocen también como OPERADORES; hay, sin embargo, expresiones que se cuentan entre los operadores y que son diferentes de los cuantificadores. En la sección precedente hemos tratado de explicar el significado de ambos cuantificadores. Para hacer resaltar su importancia puede decirse que sólo mediante el empleo explícito o implícito de operadores una expresión que contiene variables puede aparecer como proposición, esto es, como el enunciado de una aserción bien determinada. Sin la ayuda de operadores, quedaría excluido el uso de variables en la formulación de los teoremas matemáticos.

En el lenguaje corriente no se hace uso, por lo general, de variables, y por este motivo también los cuantificadores son innecesarios. En cambio, son de uso frecuente ciertas palabras que están estrechamente relacionadas con los cuantificadores; esas palabras son, entre otras: «*cada*», «*todo*», «*un cierto*», «*algún*». Para aclarar en qué consiste la relación entre dichas palabras y los cuantificadores, observemos que expresiones como las siguientes:

todo hombre es mortal

o

algunos hombres son sabios

tienen aproximadamente el mismo sentido que estas otras expresiones, formadas con ayuda de cuantificadores:

para todo x, si x es un hombre, entonces x es mortal

y

existe x tal que x es hombre y x es sabio,

respectivamente.

Por brevedad, los cuantificadores son reemplazados a veces por expresiones simbólicas. Por ejemplo, podemos convenir que en lugar de:

para objetos (o *números*) *cualesquiera x, y, ...*

y de

existen objetos (o *números*) *x, y, ... tales que*

se escriban las siguientes expresiones simbólicas:

$$\underset{x,y,\ldots}{\mathsf{A}} \quad \text{y} \quad \underset{x,y,\ldots}{\mathsf{E}}$$

respectivamente. (Entendiéndose que las funciones proposicionales que siguen a los cuantificadores deben colocarse entre paréntesis.) De acuerdo con esta convención, el enunciado que se dio al finalizar la sección precedente como ejemplo de proposición existencial condicionada, toma la siguiente forma:

(I) $$\underset{x,y}{\mathsf{A}}\ \underset{z}{\mathsf{E}}\ (x = y + z).$$

Una función proposicional en la que aparecen las variables «x», «y», «z», ..., se transforma automáticamente en una proposición cuando se le antepone uno o varios operadores que contengan

a todas aquellas variables. Si, en cambio, alguna de las variables no aparece entre los operadores, la referida expresión continúa siendo una función proposicional sin llegar a ser una proposición. Por ejemplo, la fórmula:

$$x = y + z$$

se convierte en una proposición si se le antepone una de las frases:

para números cualesquiera x, y, z;

existen números x, y, z tales que;

para números cualesquiera x e y, existe un número z tal que;

u otras similares. Pero si simplemente prefijamos el cuantificador:

existe un número z tal que o $\underset{z}{\mathsf{E}}$

aún no obtenemos una proposición; la expresión lograda:

(II) $$\underset{z}{\mathsf{E}}\ (x = y + z)$$

es, sin embargo, una función proposicional, pues se convertirá en una proposición si reemplazamos «x» e «y» por constantes y dejamos «z» inalterada, o bien anteponiendo a dicha expresión un cuantificador adecuado, como, por ejemplo:

para números cualesquiera x e y o $\underset{x,y}{\mathsf{A}}$.

Con esto se ve que entre las variables que intervienen en una función proposicional pueden distinguirse dos grupos: las de primera clase —llamadas VARIABLES LIBRES O PROPIAS— están caracterizadas por el hecho de que su presencia es el factor decisivo para que una expresión dada sea función proposicional y no proposición. Para obtener una proposición partiendo de una función proposicional, deberán sustituirse estas variables por constantes o anteponer a la función operadores que contengan a dichas variables; las restantes variables, por el contrario —las llamadas VARIABLES LIGADAS O APARENTES— no varían en una transformación de esta índole. Por ejemplo, en la función proposicional (II) consi-

derada antes «x» e «y» son variables libres y «z» aparece dos veces como variable ligada. Por otra parte, la expresión (I) es una proposición y por lo tanto contiene solamente variables ligadas.

*Depende por completo de la estructura de la función proposicional, y más precisamente de la presencia y de la posición de los operadores, que una variable de dicha función proposicional sea libre o ligada. Esto puede verse mejor en un ejemplo concreto. Consideremos la siguiente función proposicional:

(III) *para todo número* x, *si* $x = 0$ *o* $y \neq 0$, *entonces existe un número* z *tal que* $x = y \cdot z$.

Esta función comienza con un cuantificador universal que contiene a la variable «x», y por lo tanto esta variable, que aparece tres veces en la función, figura en todos esos lugares como variable ligada; en el primer lugar ella forma parte del cuantificador, mientras que en los otros dos lugares, se dice que ella está LIGADA POR EL CUANTIFICADOR. La situación de la variable «z» es parecida. Porque, aunque el cuantificador inicial de (III) no contiene a esta variable, podemos encontrar, sin embargo, una función proposicional que forma parte de (III) y que comienza con un cuantificador en el cual se halla la variable «z»; esa función parcial es la siguiente:

(IV) *existe un número* z *tal que* $x = y \cdot z$.

Los dos lugares de la función (III) en los cuales figura la variable «z» pertenecen a la función parcial (IV). Por esta razón decimos que todas las presentaciones de «z» en la función (III) son ligadas; en el primer lugar forma parte del cuantificador existencial y en el segundo lugar está ligada por ese cuantificador. En cuanto a la variable «y», que también aparece en (III), vemos que no hay ningún cuantificador en (III) que contenga a esa variable, y por lo tanto ella figura en (III) dos veces como variable libre.

El hecho de que los cuantificadores ligan variables —es decir, que ellos convierten las variables libres en ligadas dentro de la función proposicional que los sigue— constituye una propiedad esencial de los cuantificadores. Se conocen varias otras expresiones que tienen una propiedad análoga; con algunas de ellas nos encon-

traremos más adelante (en las Secciones 20 y 22), mientras que algunas otras —tales como, por ejemplo, el signo de integral— desempeñan un papel importante en la matemática superior. La palabra «operador» es el término general que se usa para designar a todas las expresiones que tienen esta propiedad.*

5. La importancia de las variables en matemática

Como hemos visto en la Sección 3, las variables desempeñan un papel fundamental en la formulación de los teoremas matemáticos. De lo dicho no se sigue, sin embargo, que en principio sea imposible formular teoremas sin usar variables. Pero en la práctica, tales formulaciones suelen presentar enormes dificultades, pues proposiciones relativamente sencillas asumirían una forma complicada y oscura. Como ilustración consideremos el siguiente teorema de la aritmética:

para números cualesquiera x e y, $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + x y + y^2)$.

Sin ayuda de variables podemos enunciarlo diciendo:

la diferencia de las terceras potencias de dos números cualesquiera es igual al producto de la diferencia de estos números por una suma de tres sumandos, el primero de los cuales es el cuadrado del primer número, el segundo el producto de ambos y el tercero el cuadrado del segundo número.

Las variables poseen todavía otra significación, esencial desde el punto de vista de la economía del pensamiento, para las demostraciones matemáticas. El lector lo comprenderá fácilmente, si intenta prescindir de las variables en cualquier demostración de las que encuentre en el curso de las consideraciones posteriores. Debe observarse que estas demostraciones son mucho más sencillas que los razonamientos habituales que aparecen en distintos dominios de la matemática superior; si se intenta desenvolver estos razonamientos sin la ayuda de variables se presentarán dificultades considerables. Todavía debemos advertir que a la introducción de las variables debemos el desarrollo de un método tan

fructífero para la solución de problemas matemáticos, como es el método de las ecuaciones. Se puede afirmar, sin más, que la invención de las variables constituye un punto culminante en la historia de la matemática: con estos símbolos el hombre ha adquirido un arma que ha allanado el camino para el inmenso desarrollo de la ciencia matemática y para la solidificación de sus fundamentos lógicos[1].

Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son funciones proposicionales y cuáles funciones designativas?

(a) *x es divisible por* 3,
(b) *la suma de los números x y* 2,
(c) $y^2 - z^2$,
(d) $y^2 = z^2$,
(e) $x + 2 < y + 3$,
(f) $(x + 3) - (y + 5)$,
(g) *la madre de x y z*,
(h) *x es la madre de z.*

2. Indicar ejemplos de funciones proposicionales y designativas del campo de la geometría.

3. Las funciones proposicionales que aparecen en la aritmética y que sólo contienen una variable (aunque ésta puede intervenir, como es natural, en varios lugares de la función dada) se pueden dividir en tres categorías:

(i) funciones que se satisfacen para todo número; (ii) funciones que no se satisfacen para ningún número; (iii) funciones

[1] Las variables se utilizaron ya en la antigüedad por los matemáticos y lógicos griegos, aunque sólo en circunstancias especiales y casos aislados. Al comienzo del siglo XVII, principalmente bajo la influencia del matemático francés F. VIETA (1540-1603), se comenzó a trabajar sistemáticamente con variables y a usarlas consistentemente en consideraciones matemáticas. Sólo al final del siglo XIX, debido a la introducción de la noción de cuantificador, fue el papel de las variables en el lenguaje científico y especialmente en la formulación de teoremas matemáticos totalmente reconocido. Esto fue en gran parte el mérito del brillante lógico y filósofo norteamericano CH. S. PEIRCE (1839-1914).

que se satisfacen para algunos números y no se satisfacen para otros.

¿A cuál de estas categorías pertenecen las funciones proposicionales siguientes:

(a) $x + 2 = 5 + x$,
(b) $x^2 = 49$,
(c) $(y + 2) \cdot (y - 2) < y^2$,
(d) $y + 24 > 36$,
(e) $x = 0$ ó $x < 0$ ó $x > 0$,
(f) $z + 24 > z + 36$?

4. Indicar ejemplos de teoremas universales, existenciales absolutos y existenciales condicionados, del campo de la aritmética y de la geometría.

5. Si a la función proposicional:

$$x > y$$

se le anteponen cuantificadores, se podrán formar con ella distintas proposiciones; por ejemplo:

para números cualesquiera x e y, $x > y$;
para un número cualquiera x, existe un número y tal que $x > y$,
existe un número y tal que para todo número x, $x > y$.

Formular todas estas proposiciones (seis en total) y estudiar cuáles de ellas son verdaderas.

6. Repítase el Ejercicio 5 con las funciones proposicionales siguientes:

$$x + y^2 > 1$$

y

x es el padre de y

(suponiendo que en esta última las variables «x» y «y» están en lugar de nombres de personas).

7. Indicar una proposición del lenguaje corriente que tenga el mismo significado que:

para todo x, si x es un perro, entonces x tiene buen olfato,

y no contenga ni cuantificadores ni variables.

8. Sustitúyase la proposición:

algunas serpientes son venenosas

por otra con el mismo significado formulada con cuantificadores y variables.

9. Distínganse las variables libres y ligadas en las siguientes expresiones:

(a) *x es divisible por y;*

(b) *para todo x,* $x - y = x + (-y)$;

(c) *si $x < z$, entonces existe un número y tal que* $x < y$ *e* $y < z$;

(d) *para un número cualquiera y, si $y > 0$, entonces existe un número z tal que* $x = y \cdot z$;

(e) *si $x = y^2$ e $y > 0$, entonces para todo número z,* $x > -z^2$;

(f) *si existe un número y tal que $x > y^2$, entonces para cualquier número z,* $x > -z^2$.

Formular las anteriores expresiones reemplazando los cuantificadores por los símbolos introducidos en la Sección 4.

*10. Si en la función proposicional (e) del ejercicio precedente reemplazamos ambas presentaciones de la variable «z» por «y», obtenemos una expresión en la cual «y» tiene algunas presentaciones libres y otras ligadas; ¿en qué lugares y por qué?

(En vista de algunas dificultades al manejar expresiones en las cuales la misma variable se presenta libre y ligada, algunos lógicos prefieren evitar completamente el uso de tales expresiones y no tratarlas como funciones proposicionales.)

*11. Determínese de una manera general, bajo qué condiciones una variable se presenta libre o ligada en un cierto lugar de una función proposicional.

12. ¿Qué números satisfacen la función proposicional:

existe un número y tal que $x = y^2$,

y qué números satisfacen:

existe un número y tal que $x \cdot y = 1$?

*13. Además de los símbolos de cuantificadores introducidos en la Sección 4, introduciremos en el Capítulo II los símbolos «$\sim$», «$\wedge$», «$\vee$», «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$» para reemplazar respectivamente a las siguientes expresiones del lenguaje corriente: «*no*» (*«no es el caso que»*), «*y*», «*o*», «*si* ..., *entonces* ...» y «*si, y sólo si*». Tradúzcanse las siguientes fórmulas al lenguaje corriente:

(a) $\underset{z}{\mathsf{A}}\,[\sim (x < y) \leftrightarrow (x = y \vee y < z)]$,

(b) $\underset{x}{\mathsf{E}}\,[(0 < x \wedge x < y) \wedge \sim (x + 1 = y)]$,

(c) $\underset{x,y}{\mathsf{A}}\,[x + y = 4 \rightarrow \underset{z}{\mathsf{E}}\,[x < z \wedge z < y]]$.

Recíprocamente, exprésense las siguientes funciones proposicionales en símbolos lógicos:

(d) *para todo número x existen números y, z tales que* $y < x$ *y* $x < z$,

(e) *para todo* x, $x^2 + 6 = 5y$ *si, y sólo si*, $x = 2$ *ó* $x = 3$,

(f) *existen* x *e* y *tales que* $x < y$ *y no es el caso que para todo* z, $x + z < y + z$.

Señálense en cada una de las funciones proposicionales (a) — (f) qué variables se presentan libres y cuáles ligadas. Si algunas variables se presentan libres, dense ejemplos, siempre que sea posible, de números que satisfacen y que no satisfacen la función proposicional. Para aquellas funciones proposicionales que son proposiciones, determínese si son verdaderas o falsas.

II

SOBRE EL CÁLCULO PROPOSICIONAL

6. Constantes lógicas; la lógica antigua y la nueva lógica

Las constantes consideradas en toda teoría científica pueden clasificarse en dos grandes grupos. El primero consta de los términos específicos de esa teoría. Si se trata, por ejemplo, de la aritmética, éstas serán términos que designarán números aislados o clases de números, o relaciones entre números, operaciones con números, etcétera; entre otras, pertenecerán a éstas las constantes que hemos indicado en la Sección 1 a modo de ejemplos. Ahora bien, en los enunciados aritméticos aparecen, además, términos de un carácter mucho más general, a saber, términos que encontramos constantemente, tanto en la vida cotidiana como en todos los dominios posibles de la ciencia y que constituyen un medio imprescindible para la comunicación del pensamiento humano y para llevar a cabo razonamientos en cualquier campo; a éstas pertenecen expresiones tales como «*no*», «*y*», «*o*», «*es*», «*cada*», «*algún*» y otras varias. Hay una disciplina particular, la LÓGICA, considerada como base de todas las demás ciencias, que se ocupa de precisar el significado de tales términos y de establecer las leyes más generales en que ellos intervienen.

Desde hace ya mucho tiempo la lógica se ha constituido como una ciencia autónoma, antes incluso que la aritmética y la geometría. Sin embargo, sólo en los últimos tiempos —después de un largo período de estancamiento casi absoluto— ha empezado esta disciplina a desarrollarse intensivamente, experimentando una

transformación completa y adoptando un carácter semejante al de una disciplina matemática; en este nuevo aspecto se llama LÓGICA MATEMÁTICA O DEDUCTIVA O SIMBÓLICA, y a veces también LOGÍSTICA. La nueva lógica sobrepasa en muchos aspectos a la antigua —no sólo a causa de la solidez de sus fundamentos y de la perfección de los métodos empleados en su construcción, sino ante todo debido a la riqueza en conceptos investigados y teoremas hallados. La lógica tradicional constituye sólo una parte de la nueva, parte que desde el punto de vista de las necesidades de otras ciencias, en particular de la matemática, es totalmente insignificante. Así, en el curso de este libro tendremos pocas oportunidades de extraer material de la lógica tradicional[1].

7. El cálculo proposicional. Negación de proposiciones; conjunción y disyunción de proposiciones

Entre los términos de carácter lógico, se caracteriza un pequeño grupo compuesto por expresiones como «*no*», «*y*», «*o*», «*si..., entonces...*». Todas ellas son bien conocidas para nosotros del lenguaje corriente; con su ayuda se forman proposiciones compuestas partiendo de proposiciones simples. En la gramática se encuentran entre las llamadas conjunciones. Por este motivo, la presencia de las citadas expresiones no constituye propiedad específica de ninguna ciencia particular. Establecer el sentido y uso de estos términos es la tarea de la parte más elemental y fundamental de la lógica, llamada CÁLCULO PROPOSICIONAL, CÁLCULO SENTENCIAL o (menos felizmente) TEORÍA DE LA DEDUCCIÓN[2].

---

[1] La lógica fue creada por ARISTÓTELES, el gran pensador griego del siglo IV antes de Jesucristo (384-322). Sus escritos lógicos aparecen reunidos en su obra *Órganon*. Como creador de la lógica matemática debemos considerar al gran filósofo y matemático alemán del siglo XVII, G. W. LEIBNIZ (1646-1716). Sin embargo, las obras lógicas de LEIBNIZ no han ejercido gran influencia en el desarrollo ulterior de las investigaciones lógicas; ha habido un período en que éstas han estado por completo en el olvido. El desarrollo continuo de la lógica matemática empieza recién a mediados del siglo XIX, precisamente con la publicación del sistema lógico del matemático inglés G. BOOLE (1815-1864). Su obra principal ha sido *An Investigation of the Laws os Thought*, Londres, 1854. La nueva lógica ha tenido su expresión más completa, hasta aquí, en la obra monumental de los grandes lógicos ingleses A. N. WHITEHEAD (1861-1947) y B. RUSSELL: *Principia Mathematica* (Cambridge, 1910-1913; segunda edición, 1925-1927).

[2] Históricamente, el primer sistema de cálculo proposicional es el contenido en la obra *Begriffsschrift* (Halle, 1879), del lógico alemán G. FREGE (1848-1925), quien, sin duda, ha sido el más gran lógico del siglo XIX. El eminente lógico polaco contemporáneo e historiador de la lógica J. LUKASIEWICZ ha dado al cálculo de enunciados una forma precisa y particularmente sencilla, y ha estimulado numerosas investigaciones relativas al mismo.

Discutiremos ahora el significado de los términos más importantes del cálculo proposicional.

Con ayuda de la palabra «*no*» se forma la NEGACIÓN de cualquier proposición; dos proposiciones, la primera de las cuales es la negación de la segunda, se llaman CONTRADICTORIAS. En el cálculo proposicional la palabra «*no*» se antepone a las proposiciones, mientras que en el lenguaje ordinario es corriente colocarla con el verbo; pero si se deseara colocarla al principio de la proposición, deberá ser reemplazada por la frase «*no es el caso que*». Así, por ejemplo, la negación de la proposición:

1 *es un número positivo*

dirá lo siguiente:

1 *no es un número positivo*,

o también:

no es el caso que 1 *sea un número positivo*.

Cuando enunciamos la negación de una proposición, expresamos con ello la idea de que dicha proposición es falsa. Si la proposición es efectivamente falsa, su negación es verdadera, mientras que en caso contrario su negación es falsa.

La unión de dos (o más) proposiciones por la palabra «*y*» resulta en la llamada CONJUNCIÓN O PRODUCTO LÓGICO de proposiciones. Las proposiciones unidas de esta manera son llamadas MIEMBROS (O COMPONENTES) DE LA CONJUNCIÓN O FACTORES DEL PRODUCTO LÓGICO. Si, por ejemplo, las proposiciones:

2 *es un número positivo*

y

$$2 < 3,$$

son unidas de esta manera, se obtiene la conjunción:

2 *es un número positivo y* $2 < 3$.

Afirmar la conjunción de dos proposiciones equivale a afirmar que ambas son verdaderas. Si éste es en realidad el caso, entonces

la conjunción es verdadera; pero si al menos una de las componentes es falsa, entonces toda la conjunción es falsa.

Con la unión de proposiciones por la palabra «o» se obtiene la DISYUNCIÓN de proposiciones, llamada también SUMA LÓGICA; las proposiciones que forman la disyunción son llamadas MIEMBROS (O COMPONENTES) DE LA DISYUNCIÓN O SUMANDOS DE LA SUMA LÓGICA. En el lenguaje corriente, la palabra «o» posee al menos dos significaciones distintas. En el llamado SENTIDO NO EXCLUSIVO, la disyunción de dos proposiciones expresa simplemente que al menos una de ellas es verdadera, sin decir nada sobre si ambas son verdaderas simultáneamente. En el segundo sentido, llamado EXCLUSIVO, una disyunción afirma, en cambio, que una de las proposiciones es verdadera y la otra, por el contrario, falsa. Supongamos encontrar en una librería el anuncio:

Los parroquianos que sean profesores o estudien en las escuelas superiores serán favorecidos con un descuento,

la palabra «o» se usa, sin duda, en su primera acepción, puesto que la rebaja no se le niega a los profesores que al mismo tiempo estudien en las escuelas superiores. En cambio, si al ruego de un niño de llevarlo de paseo por la mañana y al teatro por la tarde, respondemos:

no, hoy iremos de paseo, o al teatro,

nos servimos de la palabra «o» en su segunda acepción, ya que solamente pensamos atender a uno de los ruegos. En la lógica y en la matemática la palabra «o» se usa siempre en el sentido no exclusivo; la disyunción de dos proposiciones es considerada verdadera si ambos o por lo menos uno de sus miembros es verdadero, y en caso contrario es considerada falsa. Así, por ejemplo, puede afirmarse:

todo número es positivo o menor que 3,

aun sabiendo que existen números que son al mismo tiempo positivos y menores que 3. Para evitar posibles malentendidos sería conveniente, tanto en el lenguaje corriente como en el científico, usar la palabra «o» solamente en el primer sentido, y reem-

plazarla por la expresión compuesta «*o bien*..., *o bien*...» cuando se desee emplearla en el segundo sentido.

*Incluso si nos concretamos a los casos en que la palabra «o» aparece en su primer significado, encontramos muy notables diferencias entre sus usos en el lenguaje diario y en lógica. En el lenguaje común dos proposiciones se unen mediante la palabra «o» cuando ellas tienen algún parentesco en forma y contenido. (Lo mismo se aplica, aunque quizá en menor grado, al uso de la palabra «y».) La naturaleza de esta conexión no es bien clara, y la descripción y el análisis detallado de la misma tropezaría con considerables dificultades. De cualquier modo, nadie que no esté familiarizado con el lenguaje de la lógica contemporánea se inclinaría a considerar como expresión significativa, y menos aún, a aceptar como verdadera, una frase como la siguiente:

$2 \cdot 2 = 5$ ó *Nueva York es una ciudad grande.*

Además, el uso de la palabra «o» en el lenguaje cotidiano se halla influido por ciertos factores de carácter psicológico. Por lo general, afirmamos la disyunción de dos proposiciones sólo si creemos que una de ellas es verdadera pero ignoramos cuál. Si, por ejemplo, miramos un prado a la luz normal, no decimos que el prado es verde o azul, porque estamos en condiciones de afirmar una cosa más simple y, al mismo tiempo, más fuerte, a saber, que el prado es verde. A veces también tomamos el enunciado de una disyunción como un reconocimiento por parte del que habla, en el sentido de que no sabe cuál de los dos miembros de la disyunción es verdadero. Y si más tarde nos convencemos de que nuestro interlocutor sabía que uno de los dos miembros era falso (y sabía incluso cuál era el falso), nos sentimos inclinados a considerar a la totalidad de la disyunción como proposición falsa, aunque el otro miembro fuera indudablemente verdadero. Imaginemos, por ejemplo, que un amigo nuestro, después de habérsele preguntado cuándo dejará la ciudad, contesta que lo hará hoy, mañana o pasado. Si más tarde comprobamos que en aquel momento nuestro amigo ya había decidido partir ese mismo día, tendremos probablemente la impresión de haber sido confundidos ex profeso y que nuestro amigo nos dijo una mentira.

Cuando introdujeron la palabra «o» en sus consideraciones, los creadores de la lógica contemporánea desearon, quizá inconscientemente, simplificar su significado y hacerlo más claro e independiente de todos los factores psicológicos, en especial de la presencia o ausencia de conocimiento. En consecuencia, ellos extendieron el uso de la palabra «o», y decidieron considerar la disyunción de dos proposiciones cualesquiera, como un todo significativo, aun cuando no hubiera entre ellas ningún parentesco de contenido o de forma; y decidieron también que la verdad de una disyunción —así como las de una negación o una conjunción— dependa exclusivamente de la verdad de sus miembros. De este modo, una persona que use la palabra «o» en el sentido de la lógica contemporánea, considerará que la expresión antes mencionada:

$2 \cdot 2 = 5$ ó *Nueva York es una ciudad grande*

es una proposición que tiene sentido y que, además, es verdadera, pues su segunda parte lo es seguramente. De igual modo, si suponemos que el amigo al cual interrogamos sobre la fecha de su partida usó la palabra «o» en su significado estrictamente lógico, debemos considerar verdadera su respuesta, independientemente de nuestra opinión sobre sus intenciones.*

8. Implicación o proposición condicional. La implicación en sentido material

Si se combinan dos proposiciones por medio de las palabras «si..., *entonces*...», se obtiene una proposición compuesta que recibe el nombre de IMPLICACIÓN O PROPOSICIÓN CONDICIONAL. La cláusula subordinada, a la cual se ha prefijado la palabra «si», se llama ANTECEDENTE, y la cláusula principal, introducida por la palabra «*entonces*», se llama CONSECUENTE. Al afirmar una implicación se afirma que no puede ocurrir que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Por lo tanto, una implicación es verdadera en cualquiera de los siguientes tres casos: (i) el antecedente y el consecuente son ambos verdaderos, (ii) el antecedente es falso y el consecuente es verdadero, (iii) el antecedente y el consecuente son ambos falsos; y solamente en el cuarto caso posible, cuando

el antecedente es verdadero y el consecuente falso, es la implicación falsa. Se sigue que si alguien acepta una proposición como verdadera y al mismo tiempo acepta su antecedente como verdadero, no puede dejar de aceptar el consecuente; y si alguien acepta una implicación como verdadera y rechaza su consecuente como falso, debe rechazar también su antecedente.

*Como en el caso de la disyunción, pueden observarse considerables diferencias entre los usos de la implicación en lógica y en el lenguaje cotidiano. Así también en el lenguaje ordinario, tendemos a unir dos proposiciones mediante las palabras «*si*..., *entonces*...», sólo cuando existe una cierta conexión entre sus formas y sus contenidos. Es difícil caracterizar esta conexión en sentido general y sólo algunas veces resulta relativamente clara su naturaleza. A menudo asociamos en esta conexión la convicción de que el consecuente se sigue necesariamente del antecedente, es decir, que si suponemos verdadero el antecedente, nos vemos obligados a suponer verdadero el consecuente (y que posiblemente podemos incluso deducir el consecuente a partir del antecedente sobre la base de ciertas leyes generales que no siempre se pueden formular explícitamente). Aquí se manifiesta también un factor psicológico adicional; usualmente formulamos y aceptamos una implicación sólo si no tenemos un conocimiento exacto sobre si son verdaderos o no el antecedente y el consecuente. De otro modo el uso de una implicación parece antinatural y su sentido y su verdad pueden provocar alguna duda.

El siguiente ejemplo puede servir como ilustración. Consideremos la ley física:

todo metal es maleable,

y démosle la forma de una implicación que contenga variables:

si x *es un metal*, *entonces* x *es maleable*.

Si creemos en la verdad de esta ley universal, creemos también en la verdad de todos sus casos particulares, o sea de todas las implicaciones que se puedan obtener reemplazando «x» por nombres de materiales arbitrarios, tales como hierro, arcilla o madera. Y en efecto sucede que todas las proposiciones que se

obtienen de este modo satisfacen las condiciones dadas más arriba para que una implicación sea verdadera; nunca ocurre que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso al mismo tiempo. Notamos además, que en cualquiera de estas implicaciones existe una estrecha conexión entre el antecedente y el consecuente, la cual halla su expresión formal en la coincidencia de los sujetos de ambas proposiciones. Estamos convencidos de que, al tomar como verdadero el antecedente de cualquiera de estas implicaciones, por ejemplo, «*el hierro es un metal*», podemos deducir de él su consecuente, «*el hierro es maleable*», porque podemos hacer referencia a la ley general de que todo metal es maleable.

No obstante, algunas de las proposiciones discutidas hasta ahora parecen artificiales y dudosas desde el punto de vista del lenguaje común. No se suscita ninguna duda en la proposición universal dada arriba, o en los casos particulares que se obtienen reemplazando «*x*» por el nombre de un material del cual no sabemos si es un metal o si es maleable. Pero si reemplazamos «*x*» por «*hierro*», nos encontramos ante el caso de que el antecedente y el consecuente son indudablemente verdaderos; y entonces preferiremos usar en vez de una implicación una expresión como ésta:

puesto que el hierro es un metal, él es maleable.

Análogamente, si sustituimos «*x*» por «*arcilla*», obtenemos una implicación cuyo antecedente es falso y cuyo consecuente es verdadero, y tenderíamos a reemplazarla por la expresión:

aunque la arcilla no es un metal, es maleable.

Finalmente, si reemplazamos «*x*» por «*madera*», obtenemos una implicación en la cual el antecedente y el consecuente son ambos falsos; si, en este caso, deseamos retener la forma de una implicación, deberemos alterar la forma gramatical de los verbos:

si la madera fuera un metal, entonces sería maleable.

Los lógicos, que deben atender a las necesidades de los lenguajes científicos, adoptaron con respecto a la frase «*si..., entonces...*» el mismo procedimiento que en el caso de la palabra «*o*». Decidieron

simplificar y aclarar el significado de esta frase, así como liberarla de factores psicológicos. Con este propósito extendieron el uso de dicha frase, considerando que una implicación tiene sentido aun cuando no exista ninguna conexión entre sus dos miembros e hicieron depender la verdad o la falsedad de la implicación sólo de la verdad o la falsedad del antecedente y del consecuente. Para caracterizar esta situación brevemente, decimos que la lógica contemporánea usa las IMPLICACIONES EN SENTIDO MATERIAL, o simplemente usa IMPLICACIONES MATERIALES; esto se opone al uso de IMPLICACIÓN EN SENTIDO FORMAL O IMPLICACIÓN FORMAL, caso en el cual la presencia de una cierta conexión formal entre el antecedente y el consecuente es una condición indispensable para que la implicación tenga sentido y para que sea verdadera. El concepto de implicación formal no es, quizá, suficientemente claro, pero en todo caso es más estrecho que el de implicación material; toda implicación formal con significado y verdadera es también una implicación material con significado y verdadera, pero lo recíproco no es cierto.

Para ilustrar las observaciones que preceden, consideremos las cuatro proposiciones siguientes:

si $2 \cdot 2 = 4$, *entonces Nueva York es una ciudad grande;*

si $2 \cdot 2 = 5$, *entonces Nueva York es una ciudad grande;*

si $2 \cdot 2 = 4$, *entonces Nueva York es una ciudad pequeña;*

si $2 \cdot 2 = 5$, *entonces Nueva York es una ciudad pequeña.*

En el lenguaje cotidiano, difícilmente se atribuiría significado a estas proposiciones, y menos aún se las consideraría verdaderas. Desde el punto de vista de la lógica matemática, por otra parte, todas ellas tienen significado, la tercera es falsa y las tres restantes son verdaderas. Con ello no se afirma, por supuesto, que tales proposiciones sean particularmente relevantes desde cualquier punto de vista, ni que las apliquemos como premisas en nuestras argumentaciones.

Sería un error pensar que la diferencia entre el lenguaje común y el lenguaje de la lógica, diferencia que hemos sacado a luz en

este texto, tiene carácter absoluto, así como sería equivocado pensar que las reglas esbozadas arriba acerca del uso de las palabras «*si*..., *entonces*...» en el lenguaje común no admiten excepciones. En realidad, el uso de dichas palabras fluctúa más o menos, y si miramos a nuestro alrededor, podemos encontrar casos en los cuales ese uso no concuerda con nuestras reglas. Imaginemos que un amigo nuestro se halla ante un problema muy dificultoso y que nosotros no creemos que lo resuelva. Podemos expresar nuestro descreimiento en una forma burlesca diciendo:

si resuelves este problema, yo me comeré mi sombrero.

La intención de estas palabras es absolutamente clara. Afirmamos con ellas una implicación cuyo consecuente es indudablemente falso; por lo tanto, puesto que afirmamos la verdad de la implicación en su totalidad, con ello afirmamos al mismo tiempo la falsedad del antecedente; es decir que expresamos la convicción de que nuestro amigo no resolverá el problema en que se halla empeñado. Pero también es absolutamente claro que el antecedente y el consecuente de nuestra implicación no están conectados en ningún sentido, y por lo tanto tenemos un caso típico de implicación material y no formal.

La divergencia en el uso de la frase «*si*..., *entonces*...» en el lenguaje ordinario y en lógica matemática ha estado en la raíz de larguísimas e incluso apasionadas discusiones, en las cuales, dicho sea de paso, los lógicos profesionales tomaron sólo una parte menor[1]. (Es curioso que se prestara una atención considerablemente menor a la divergencia análoga producida en el caso de la palabra «*o*».) Se ha objetado que los lógicos, por causa del uso de la implicación material, llegaron a paradojas e incluso a disparates. Esto ha terminado en un clamor en favor de la reforma de la lógica con el objeto de llegar a un acercamiento entre la

---

[1] Es interesante notar que el comienzo de esta discusión data de la antigüedad. Fue el filósofo griego FILÓN DE MEGARA (en el siglo IV antes de Cristo) quien, probablemente, divulgó por primera vez en la historia de la lógica el uso de la implicación material; este uso se oponía al punto de vista de su maestro, DIODORUS CRONUS, quien proponía usar la implicación en un sentido más estrecho, más bien relacionado con lo que hemos llamado aquí el sentido formal. Un poco más tarde (en el siglo III antes de Cristo), y probablemente bajo la influencia de FILÓN, fueron discutidas varias posibles concepciones de la implicación por los filósofos y lógicos griegos de la escuela estoica (en cuyos escritos se hallan los primeros esbozos del cálculo proposicional).

lógica y el lenguaje ordinario en lo concerniente al uso de la implicación.

Es difícil conceder que estas críticas estén bien fundadas. No hay frase en el lenguaje ordinario que tenga un sentido precisamente determinado. Sería difícil encontrar dos personas que usaran todas las palabras con el mismo sentido exactamente, e incluso en el lenguaje de una misma persona el significado de una misma palabra varía de un período a otro de su vida. Además, el significado de las palabras del lenguaje común es por lo general muy complicado; depende no solamente de la forma exterior de la palabra, sino también de las circunstancias en que se la expresa y a veces depende de factores psicológicos subjetivos. Si un hombre de ciencia desea introducir en su disciplina científica un concepto de la vida diaria y establecer leyes generales relativas a ese concepto, debe siempre aclarar su contenido, hacerlo más preciso y más simple, y liberarlo de atributos no esenciales; no importa aquí que ese hombre de ciencia sea un lógico que estudia la frase «*si*..., *entonces*...» o, por ejemplo, un físico que trata de establecer el significado exacto de la palabra «*metal*». De cualquier manera que el hombre de ciencia realice su tarea, el uso del término tal como él lo ha establecido se desvía mucho o poco de su uso en la vida corriente. Pero si él declara explícitamente en qué sentido ha decidido usar ese término y actúa de hecho en conformidad con su decisión, nadie podrá objetar que su procedimiento lo conduce a resultados sin sentido.

Sin embargo, a raíz de las discusiones que han tenido lugar, algunos lógicos han intentado reformar la teoría de la implicación. Por lo general ellos no niegan a la implicación material un lugar dentro de la lógica, pero ansían encontrar también otro concepto de implicación, por ejemplo, de tal naturaleza que la posibilidad de deducir el consecuente del antecedente constituya una condición necesaria para la verdad de la implicación; incluso desean, según parece, colocar el nuevo concepto en primer plano. Estas tentativas son de fecha relativamente reciente, y es aún demasiado temprano para juzgar en modo definitivo su valor[1]. Sin embargo, hoy parece casi cierto que la teoría de la implicación material so-

---

[1] La primera tentativa de esta índole fue realizada por el filósofo y lógico norteamericano contemporáneo C. I. LEWIS.

brepasa en simplicidad a todas las otras teorías, y, en todo caso, no debe olvidarse que la lógica edificada sobre este simple concepto, se ha convertido en una base satisfactoria para los más complicados y sutiles razonamientos matemáticos.*

9. El uso de la implicación en matemática

A las expresiones lógicas usadas en otras ciencias y especialmente en la matemática con más frecuencia, pertenece la frase «*si*..., *entonces*...». Los teoremas matemáticos, y en especial, los de carácter universal, tienden a tener forma de implicaciones. En matemática el antecedente es llamado HIPÓTESIS y el consecuente es llamado CONCLUSIÓN. Como ejemplo sencillo de un teorema aritmético que tiene la forma de una implicación, podemos mencionar el siguiente:

si x es un número positivo, entonces $2x$ es un número positivo;

en el cual «*x es un número positivo*» es la hipótesis y «*$2x$ es un número positivo*» es la conclusión.

Además de estas formas clásicas, por decirlo así, de teoremas matemáticos, se encuentran ocasionalmente también otras formulaciones en las que la hipótesis y la conclusión no están conectadas por la frase «*si*..., *entonces*...», sino de otra manera distinta. El teorema acabado de indicar, por ejemplo, podemos reformularlo en cualquiera de las siguientes formas:

de: x es un número positivo, se sigue: $2x$ es un número positivo;

*la hipótesis: x es un número positivo, implica (*o *tiene como consecuencia) la conclusión: $2x$ es un número positivo;*

la condición: x es un número positivo, es suficiente para que $2x$ sea un número positivo;

para que $2x$ sea un número positivo, es suficiente que x sea un número positivo;

la condición: $2x$ es un número positivo, es necesaria para que x sea un número positivo;

para que x sea un número positivo, es necesario que $2x$ sea un número positivo.

En lugar de afirmar una proposición condicional puede afirmarse, pues, que la hipótesis de la proposición IMPLICA O TIENE COMO CONSECUENCIA a la conclusión, o que es una CONDICIÓN SUFICIENTE para la conclusión; asimismo podemos expresarnos diciendo que la conclusión SE SIGUE de la hipótesis, o que es una CONDICIÓN NECESARIA para ésta. Un lógico tendría mucho que objetar contra algunas de las formulaciones indicadas, pero en la matemática se usan con frecuencia.

*Las objeciones que podrían surgir aquí se refieren a aquellos enunciados en los que aparece alguna de las palabras «*hipótesis*», «*conclusión*», «*consecuencia*», «*se sigue que*», «*implica*».

Para entender los puntos esenciales de estas objeciones, observemos en primer lugar que dichos enunciados difieren en contenido del enunciado dado al principio. Mientras en la formulación original hablamos solamente de números, propiedades de números, operaciones con número, etc. —es decir, objetos de que se ocupa la matemática—, en las formulaciones que ahora discutimos se habla de hipótesis, conclusiones, condiciones, es decir, proposiciones o funciones proposicionales que aparecen en la matemática. Puede hacerse notar en esta ocasión que, en general, la gente no distingue con bastante claridad los términos que designan objetos de los cuales se ocupa una determinada ciencia, de aquellos que designan varias clases de expresiones que aparecen en la formulación de esa ciencia. Esto puede observarse como caso particular en el dominio de la matemática, especialmente en el nivel elemental. Es de presumir que muy pocos están enterados de que ciertos términos como «ecuación», «desigualdad», «polinomio» o «fracción algebraica», que se encuentran a menudo en los libros de texto de álgebra elemental, no pertenecen, estrictamente hablando, al dominio de la matemática o al de la lógica, puesto que esos términos no designan objetos de ese dominio; las ecuaciones y las desigualdades son funciones proposicionales especiales, mientras que los polinomios y las fracciones algebraicas —especialmente tal como se los trata en los textos elementales— son casos particulares de funciones designativas (cf. Sección 2). La confusión proviene en este caso del hecho de que términos de esa clase se usan

frecuentemente en la formulación de los teoremas matemáticos. Este tipo de formulación ha llegado a ser de uso muy general, y quizá no vale la pena rechazarlo, porque no presenta ningún peligro particular; pero sí valdría la pena reconocer que, para cada teorema formulado con la ayuda de tales términos, existe otra formulación, lógicamente más correcta, en la cual esos términos no aparecen. Por ejemplo, el teorema:

la ecuación: $x^2 + ax + b = 0$ *tiene a lo más dos raíces*

puede expresarse de manera más correcta como sigue:

existen a lo más dos números x *tales que* $x^2 + ax + b = 0$.

Volviendo a las formulaciones objetables de la implicación, haremos resaltar un punto más importante todavía. En esas formulaciones afirmamos que una proposición, a saber el antecedente de la implicación, tiene otra —el consecuente de la implicación— como consecuencia, o bien que la segunda se sigue de la primera. Pero, por lo general, cuando nos expresamos en esta forma, presuponemos mentalmente que la aceptación de la primera proposición como verdadera nos conduce necesariamente, por así decir, a una aceptación semejante relativa a la segunda proposición (y que posiblemente estamos incluso en condiciones de derivar la segunda proposición de la primera). Sin embargo, como ya hemos visto en la Sección 8, el significado de una implicación tal como se entiende en lógica contemporánea, no depende de que el consecuente tenga conexión alguna con su antecedente. Cualquiera que se sienta sorprendido por el hecho de que la lógica considera con sentido e incluso como verdadera a la siguiente expresión:

si $2 \cdot 2 = 4$, *entonces Nueva York es una ciudad grande,*

encontrará aún más dificultoso reconciliarse con una transformación de esa frase tal como:

la hipótesis de que $2 \cdot 2 = 4$ *tiene como consecuencia que Nueva York es una ciudad grande.*

Vemos así que estas maneras de formular o de transformar una proposición condicional, conducen a expresiones paradójicas y hacen más profundas las discrepancias entre lenguaje común y lógica matemática. Es ésta la razón por la cual aquellas proposiciones han dado lugar con frecuencia a varios malentendidos, y han sido una de las causas de las apasionadas y a menudo estériles discusiones que antes hemos mencionado.

Desde el punto de vista puramente lógico podemos eludir todas las objeciones que hemos referido, estableciendo explícitamente de una vez por todas, que al hacer uso de las expresiones en cuestión, nos desligamos de su significado usual y les atribuimos directamente el mismo contenido que a la proposición condicional ordinaria. Pero esto podría resultar inconveniente en otro aspecto; porque hay situaciones —aunque no en la lógica misma, sino en un campo estrechamente relacionado con ella como es la metodología de las ciencias deductivas (cf. Capítulo VI)— en las cuales hablamos de proposiciones y de la relación de consecuencias entre ellas, y en las cuales usamos términos como «*implica*» y «*se sigue*» con un significado diferente al expuesto y que es mucho más semejante al significado ordinario. Por lo tanto, sería mejor evitar aquellas formulaciones en su totalidad, tanto más cuanto tenemos a nuestra disposición varias expresiones que no admiten ninguna objeción de las que hemos mencionado.*

10. Equivalencia de proposiciones

Vamos a estudiar todavía otra expresión del dominio del cálculo proposicional, que en el lenguaje corriente aparece con menor frecuencia, a saber, la frase «*si, y sólo si*». Al unir dos proposiciones cualesquiera por medio de esta frase, se obtiene una proposición compuesta que se llama EQUIVALENCIA. Las proposiciones conectadas de esta manera reciben los nombres de MIEMBRO IZQUIERDO y MIEMBRO DERECHO DE LA EQUIVALENCIA. Al afirmar la equivalencia de dos proposiciones, se excluye la posibilidad de que una sea verdadera y la otra falsa; por lo tanto, una equivalencia es verdadera si sus miembros izquierdo y derecho son o bien ambos verdaderos o bien ambos falsos; en caso contrario, la equivalencia es falsa.

El sentido de una equivalencia puede caracterizarse también de otra manera. Si en una proposición condicional intercambiamos antecedente y consecuente obtenemos una nueva proposición que, en su relación con la proposición original, llamamos PROPOSICIÓN RECÍPROCA (o la RECÍPROCA DE LA PROPOSICIÓN DADA). Tomemos, por ejemplo, como proposición original la implicación:

(I) *si x es un número positivo, entonces $2x$ es un número positivo;*

la recíproca de esta proposición será:

(II) *si $2x$ es un número positivo, entonces x es un número positivo.*

Como muestra este ejemplo, a veces sucede que la recíproca de una proposición verdadera es asimismo verdadera. Para ver, por otra parte, que esto no es una regla general, basta reemplazar «$2x$» por «x^2» en (I) y en (II); la proposición (I) seguirá siendo verdadera mientras que (II) se vuelve falsa. Pero si se da el caso que dos proposiciones condicionales, una de las cuales es la recíproca de la otra, son ambas verdaderas, entonces podemos expresar este hecho uniendo antecedente y consecuente de una cualquiera de ellas por las palabras «*si, y sólo si*». Así, las dos proposiciones anteriores, la proposición original (I) y su recíproca (II), pueden ser reemplazadas por una sola proposición:

x es un número positivo si, y sólo si, $2x$ es un número positivo

(en donde pueden permutarse entre sí los dos miembros de esta equivalencia).

Por lo demás, se conocen otras formulaciones que expresan la misma idea, como por ejemplo:

de: x es un número positivo, se sigue: $2x$ es un número positivo, y recíprocamente;

las condiciones que x sea un número positivo y que $2x$ sea un número positivo son equivalentes entre sí;

la condición de ser x un número positivo es necesaria y suficiente para que $2x$ sea un número positivo;

para que x sea un número positivo es necesario y suficiente que 2x sea un número positivo.

En general, en lugar de unir dos proposiciones por la frase «*si, y sólo si*», se puede decir también que la RELACIÓN DE CONSECUENCIA vale en AMBAS DIRECCIONES entre estas dos proposiciones, o que las dos proposiciones son EQUIVALENTES, o finalmente que cada una de dichas proposiciones representa una CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE para la otra.

11. Formulación de definiciones. Reglas de definición

La frase «*si, y sólo si*», se utiliza muy a menudo para la formulación de DEFINICIONES, es decir, de convenciones que estipulan le sentido que debe atribuirse a una expresión que hasta entonces no hubiese aparecido en la disciplina considerada y cuyo sentido no parezca comprensible inmediatamente de por sí. Imagínese, por ejemplo, que hasta ahora no se hubiese usado en la aritmética el símbolo «$\leqq$» y que quisiésemos introducirlo en los razonamientos (considerándolo, como de costumbre, como abreviatura de la expresión «*menor o igual que*»). En este caso, deberíamos ante todo definir el citado símbolo, es decir, aclarar su significación con ayuda, precisamente, de expresiones conocidas ya por nosotros y cuyo sentido no dejase lugar a ninguna duda; con este fin, estableceremos la definición siguiente, en la que supondremos que a los símbolos ya conocidos pertenece, entre otros, el símbolo «$>$»:

decimos que $x \leqq y$ si, y sólo si, no es el caso que $x > y$.

La definición recién formulada estipula la equivalencia de las dos funciones proposicionales:

$$x \leqq y$$

y

no es el caso que $x > y$;

se puede decir, pues, que hace posible la transformación de la fórmula «$x \leqq y$» en una expresión equivalente a ella que ya no

contiene el símbolo «$\leqq$» y que está formulada en términos conocidas por nosotros. Lo mismo vale para cualquier fórmula obtenida a partir de «$x \leqq y$» reemplazando «x» e «y» por símbolos o expresiones arbitrarias que designen números. Por ejemplo, la fórmula:

$$3 + 2 \leqq 5$$

es equivalente a la proposición:

$$\textit{no es el caso que } 3 + 2 > 5;$$

como ésta es una proposición verdadera, también lo será la fórmula considerada. Del mismo modo, la fórmula:

$$4 \leqq 2 + 1$$

es equivalente a la proposición:

$$\textit{no es el caso que } 4 > 2 + 1$$

y ahora las dos serán falsas. Esta observación se puede aplicar también a proposiciones más complejas y a funciones proposicionales; transformando, por ejemplo, la proposición:

$$\textit{si } x \leqq y \textit{ e } y \leqq z, \quad \textit{entonces } x \leqq z,$$

obtenemos:

$$\textit{si no es el caso que } x > y, \textit{ y no es el caso que } y > z, \textit{ entonces no es el caso que } x > z.$$

Brevemente, la definición indicada nos permite transformar cualquier proposición simple o compuesta que contenga el símbolo «$\leqq$» en otra equivalente a ella que no contenga dicho símbolo —esto es, de traducirla a un lenguaje, por decirlo así, en que no figure el símbolo «$\leqq$». En esto consiste precisamente el papel que desempeñan las definiciones en las disciplinas matemáticas.

Para que una definición cumpla su propósito, debemos tomar algunas precauciones en su formulación. Con este fin se introdu-

cen reglas especiales, las llamadas REGLAS DE DEFINICIÓN, que especifican cómo deben construirse correctamente las definiciones. Sin entrar a una formulación precisa de estas reglas, solamente advertiremos, que en virtud de ellas, toda definición puede adoptar la forma de una equivalencia; el miembro izquierdo de ésta, llamado DEFINIENDUM, debe ser una función proposicional breve y gramaticalmente sencilla que contenga la constante a definir; el miembro derecho, llamado DEFINIENS, puede ser una función proposicional de estructura arbitraria, que contenga solamente constantes cuyo sentido sea inmediatamente comprensible o haya sido ya definido anteriormente. En particular, no deberá aparecer en el definiens, ni la constante a definir, ni ninguna expresión definida con su ayuda; en tales casos, la definición no sería correcta, contendría un error conocido como CÍRCULO VICIOSO EN LA DEFINICIÓN (de la misma manera se habla de un CÍRCULO VICIOSO EN LA DEMOSTRACIÓN si el argumento usado para establecer un cierto teorema se basa en ese mismo teorema o en algún otro teorema que ha sido demostrado con su ayuda). Para hacer resaltar el carácter convencional de una definición y distinguirla de otras expresiones que tienen la forma de una equivalencia y, sin embargo, no son definiciones, es conveniente anteponer a aquélla palabras como «*decimos que*». Se comprueba con facilidad, que la definición dada más arriba del símbolo «$\leqq$», satisface todas estas condiciones; ella tiene como definiendum:

$$x \leqq y,$$

y como definiens:

no es el caso que $x > y$.

Hay que advertir, que en la formulación de definiciones, en lugar de la frase «*si, y sólo si*», el matemático usa con preferencia las palabras «*si*», o «*en caso que*»; al formular, por ejemplo, la definición del símbolo «$\leqq$», es presumible que le hubiese dado la siguiente forma:

decimos que $x \leqq y$, *si no es el caso que* $x > y$.

Aparentemente, esta definición sólo establece que el definiendum es consecuencia del definiens, pero no hace resaltar que la relación

de consecuencia rige también en sentido inverso y no dice, por consiguiente, que el definiendum y el definiens son equivalentes entre sí. En realidad, tenemos aquí una convención implícita, en virtud de la cual, las frases «*si*» o «*en caso que*», cuando usadas para unir definiendum y definiens, significan exactamente lo mismo que la frase «*si, y sólo si*». Puede agregarse que la forma de equivalencia no es la única en que pueden formularse definiciones.

12. Leyes del cálculo proposicional

Habiendo finalizado nuestra discusión de las expresiones más importantes del cálculo proposicional, trataremos de clarificar ahora el carácter de las leyes de este cálculo.

Consideremos la proposición siguiente:

si 1 *es un número positivo y* $1 < 2$, *entonces* 1 *es un número positivo.*

Esta proposición es indudablemente verdadera; en ella figuran solamente constantes pertenecientes a los dominios de la lógica y la aritmética y, sin embargo, a nadie se le ocurriría incluir esta proposición como un teorema particular en ningún tratado de matemáticas. Si reflexionamos a qué circunstancias debemos atribuir esto llegamos a la conclusión de que desde el punto de vista de la aritmética este enunciado carece por completo de interés: no amplía en modo alguno nuestro conocimiento de los números; su verdad no depende en absoluto del contenido de los conceptos aritméticos que figuran en él, sino simplemente del sentido de las palabras «*y*», «*si*», «*entonces*». Para convencerse de ello sustituyamos en la proposición considerada los componentes:

1 *es un número positivo*

y

$1 < 2$,

por otras proposiciones cualesquiera de un dominio arbitrario; obtenemos entonces una serie de proposiciones, verdaderas como la proposición original, por ejemplo:

si una figura es un rombo y la misma figura es un rectángulo, esta figura es un rombo;

si hoy es domingo y hace sol, entonces hoy es domingo.

Para expresar estos resultados en una forma más general, introduzcamos las variables «*p*» y «*q*» estipulando que estos símbolos no son reemplazables por designaciones de números o de otros objetos, sino por proposiciones; variables de este tipo se denominan VARIABLES PROPOSICIONALES. Además, en la proposición considerada sustituiremos la expresión:

1 *es un número positivo*

por «*p*», y la fórmula:

$$1 < 2$$

por «*q*»; de este modo obtendremos la función proposicional:

si p y q, entonces p.

Esta función proposicional tiene la propiedad de que, si en los lugares de «*p*» y «*q*» se insertan proposiciones cualesquiera, las proposiciones obtenidas son siempre verdaderas. A esta afirmación se le puede dar la forma universal siguiente:

para p y q cualesquiera, si p y q, entonces p.

Esta proposición es una ley del cálculo proposicional y recibe el nombre de LEY DE SIMPLIFICACIÓN de la multiplicación lógica. La proposición que hemos considerado antes es sólo un caso particular de esta ley. Así como, por ejemplo, la fórmula:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

es un caso particular del siguiente teorema general de la aritmética:

para números cualesquiera x e y, $x \cdot y = y \cdot x$.

En modo análogo pueden obtenerse otras leyes del cálculo proposicional. Damos a continuación algunos ejemplos de tales leyes; en su formulación omitimos el cuantificador universal (*«para todo p, q, ...»*) de acuerdo al uso mencionado en la Sección 3, que, para el cálculo proposicional, se ha convertido casi en una regla.

Si p, entonces p.

Si p, entonces q o p.

Si p implica q y q implica p, entonces p si, y sólo si, q.

Si p implica q y q implica r, entonces p implica r.

La primera de estas leyes recibe el nombre de LEY DE IDENTIDAD; la segunda, el de LEY DE SIMPLIFICACIÓN de la adición lógica, y la cuarta, el de LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO.

Así como los teoremas aritméticos de carácter universal afirman algo acerca de las propiedades de números arbitrarios, puede decirse que las leyes del cálculo proposicional afirman algo acerca de las propiedades de proposiciones arbitrarias. El hecho de que en estas leyes sólo aparecen variables que ocupan el lugar de proposiciones arbitrarias, es una característica del cálculo proposicional y es la que determina su gran generalidad y el alcance de sus posibilidades de aplicación.

13. Simbolismo del cálculo proposicional; funciones de verdad y tablas de verdad

Hay un método simple y general, llamado MÉTODO DE LAS TABLAS DE VERDAD O MATRICES, que nos permite, en cualquier caso particular, reconocer cuándo una proposición dada del dominio del cálculo proposicional es verdadera, y cuándo, por lo tanto, ella puede contarse entre las leyes de dicho cálculo[1].

Para describir este método conviene aplicar un simbolismo especial. Reemplazaremos las expresiones siguientes:

---

[1] Este método tiene su origen en PEIRCE (a quien ya hemos citado anteriormente; cf. nota 1 en la pág. 37).

no; y; o; si..., entonces...; si, y sólo si

por los símbolos:

$\sim$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$

respectivamente. El primero de estos símbolos debe ser colocado al frente de las expresiones cuya negación se desea obtener; los símbolos restantes se colocan entre dos expresiones («$\rightarrow$» se escribe, por lo tanto, en el lugar de la palabra «*entonces*», mientras que la palabra «*si*» es simplemente omitida). De una o dos expresiones más simples nos vemos conducidos, de esta manera, a expresiones más complicadas; y si deseamos emplear estas últimas para construir expresiones aún más complicadas, colocamos a aquéllas entre paréntesis.

Con la ayuda de variables, paréntesis y los símbolos constantes consignados más arriba (y a veces también constantes adicionales de carácter similar y que no investigaremos aquí) estamos en condiciones de escribir todas las proposiciones y funciones proposicionales pertenecientes al dominio del cálculo proposicional. Aparte de las variables proposicionales, las funciones proposicionales más simples son las expresiones:

$$\sim p, \qquad p \wedge q, \qquad p \vee q, \qquad p \rightarrow q, \qquad p \leftrightarrow q$$

(y otras expresiones similares que difieren de éstas solamente en la forma de las variables usadas). Como ejemplo de una función proposicional compuesta consideramos la expresión:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r),$$

lo cual se lee, traduciendo los símbolos al lenguaje común:

si p o q, entonces p y r.

Una expresión más complicada todavía es la ley del silogismo hipotético dada más arriba, que ahora toma la forma:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Podemos asegurarnos fácilmente de que toda función proposicional que aparece en nuestro cálculo es una de las llamadas

FUNCIONES DE VERDAD. Esto quiere decir que la verdad o falsedad de cualquier proposición obtenida de aquella función al sustituir las variables por proposiciones, depende exclusivamente de la verdad o falsedad de las proposiciones que han reemplazado a las variables. Así como para las funciones proposicionales simples, «$\sim p$», «$p \wedge q$», etc., esto se deduce inmediatamente de las indicaciones formuladas en las Secciones 7, 8 y 10 con respecto al significado que se atribuye en lógica a las palabras «no», «y», etc. Pero lo mismo puede decirse de las funciones compuestas. Consideremos, por ejemplo, la función «$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$». Una proposición que se obtenga de ella por sustitución, será una implicación y, por lo tanto, su verdad dependerá sólo de la verdad de su antecedente y de su consecuente; pero la verdad del antecedente, que es una disyunción obtenida de «$p \vee q$», depende sólo de la verdad de las proposiciones colocadas en lugar de «p» y de «q», y análogamente, la verdad del consecuente depende de la verdad de las proposiciones que sustituyan a «p» y a «r». Así, finalmente, se ve que la verdad de toda la proposición obtenida de la función proposicional que se considera, depende exclusivamente de la verdad de las proposiciones que sustituyan a «p», a «q» y a «r».

Con el objeto de ver con toda exactitud cómo la verdad o la falsedad de una proposición obtenida por sustitución de una función proposicional dada, depende de la verdad o de la falsedad de las proposiciones que sustituyen a las variables, construimos la TABLA DE VERDAD O MATRIZ de esa función. Comenzaremos por dar la tabla de verdad para la función «$\sim p$»:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Y aquí tenemos la tabla de verdad conjunta para las otras funciones elementales «$p \wedge q$», «$p \vee q$», etc.:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V

El significado de estas tablas se hace inmediatamente comprensible si tomamos las letras «V» y «F» como abreviaturas de «proposición verdadera» y de «proposición falsa», respectivamente. En la segunda tabla, por ejemplo, hallamos en la segunda línea y debajo de los encabezamientos «p», «q» y «$p \to q$», las letras «F», «V» y «V» respectivamente. Obtenemos de ello que una proposición obtenida de la implicación «$p \to q$» es verdadera si sustituimos «p» por cualquier proposición falsa y «q» por cualquier proposición verdadera; esto está de acuerdo, por supuesto, con las observaciones hechas en la Sección 8. Las variables «p» y «q» que aparecen en estas tablas pueden, naturalmente, ser reemplazadas por otras variables cualesquiera.

Con la ayuda de las dos tablas anteriores, llamadas TABLAS DE VERDAD FUNDAMENTALES, podemos construir TABLAS DE VERDAD DERIVADAS para cualquier función proposicional compuesta. La tabla para la función «$(p \vee q) \to (p \wedge r)$», por ejemplo, es la siguiente:

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \to (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V

Para explicar la construcción de esta tabla fijémonos, por ejemplo, en su quinta línea horizontal (sin contar los encabezamientos). Sustituimos «p» y «q» por proposiciones verdaderas y «r» por una proposición falsa. De acuerdo con la segunda tabla fundamental, obtenemos entonces de «$p \vee q$» una proposición verdadera y de «$p \wedge r$» una proposición falsa. De la función total «$(p \vee q) \to (p \wedge r)$» obtenemos entonces una implicación con antecedente verdadero y consecuente falso; por lo tanto, y de nuevo con la ayuda de la segunda tabla fundamental (en la cual suponemos a «p» y «q» reemplazadas momentáneamente por «$p \vee q$» y «$p \wedge r$»), concluimos que esa implicación es una proposición falsa.

Las líneas horizontales que consisten de símbolos «V» y «F» se llaman FILAS de la tabla, y las líneas verticales se llaman COLUMNAS. Cada fila, o más bien la parte de cada fila que está a la izquierda de la barra vertical, representa una cierta sustitución de las variables por proposiciones verdaderas o falsas. Cuando se construye la matriz de una función dada, debe tenerse cuidado de agotar todas las posibles maneras en las cuales las combinaciones de símbolos «V» y «F» puedan correlacionarse con las variables; y, por supuesto, nunca se escriben en la tabla dos filas que no difieran ni en el número ni en el orden de los símbolos «V» y «F». Puede comprobarse fácilmente que el número de filas de una tabla depende de manera simple del número de variables diferentes que aparecen en la función; si la función contiene 1, 2, 3... variables de diferente forma, su matriz tiene $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, ... filas. En cuanto al número de columnas, es igual al número de funciones proposicionales parciales de diferente forma que haya en la función dada (donde la función total se cuenta también entre sus funciones parciales).

Estamos ahora en condiciones de decir cómo puede decidirse si una proposición del cálculo proposicional es verdadera o no. Como sabemos, en el cálculo proposicional no hay diferencia exterior entre proposiciones y funciones proposicionales; la única diferencia consiste en el hecho de que las expresiones consideradas como proposiciones son siempre completadas mentalmente por el cuantificador universal. Para reconocer si la proposición dada es verdadera, la tratamos como si fuera una función proposicional y construimos la tabla de verdad para ella. Si, en la última columna de esta tabla no aparece ningún símbolo «F», entonces toda proposición que se obtenga de la función dada por sustitución será verdadera; y por lo tanto nuestra proposición universal original (que se obtiene de la función proposicional prefijando mentalmente el cuantificador universal), es también verdadera. Si, en cambio, la última columna contiene por lo menos un símbolo «F», nuestra proposición es falsa.

Así, por ejemplo, hemos visto que en la matriz construida para la función «$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$» el símbolo «F» aparece cuatro veces en la última columna. Si, por lo tanto, consideramos a esta expresión como proposición (esto es, si le prefijamos las palabras

«para p, q y r cualesquiera»), tenemos entonces una proposición falsa. Por otra parte, puede verificarse fácilmente con la ayuda del método de las tablas de verdad, que todas las leyes del cálculo proposicional establecidas en la Sección 12, o sea las leyes de simplificación, de identidad, etc., son proposiciones verdaderas. La tabla para la ley de simplificación:

$$(p \land q) \rightarrow p,$$

por ejemplo, es como sigue:

p	q	$p \land q$	$(p \land q) \rightarrow p$
V	V	V	V
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	V

Damos aquí otras leyes importantes del cálculo proposicional cuya verdad puede obtenerse de manera análoga:

$\sim (p \land \sim p)$, $\qquad p \lor \sim p$,

$(p \land p) \leftrightarrow p$, $\qquad (p \lor p) \leftrightarrow p$,

$(p \land q) \leftrightarrow (q \land p)$, $\qquad (p \lor q) \leftrightarrow (q \lor p)$,

$[p \land (q \land r)] \leftrightarrow [(p \land q) \land r]$, $\qquad [p \lor (q \lor r)] \leftrightarrow [(p \lor q) \lor r]$.

Las dos leyes de la primera línea se llaman, respectivamente, LEY DE CONTRADICCIÓN y LEY DEL TERCERO EXCLUIDO; luego tenemos las dos LEYES DE TAUTOLOGÍA (para la multiplicación y la adición lógicas); tenemos luego las dos LEYES CONMUTATIVAS, y, finalmente, las dos LEYES ASOCIATIVAS. Es fácil ver que el significado de estas dos últimas leyes se hace muy oscuro si tratamos de expresarlas en lenguaje ordinario. Esto muestra muy claramente el valor del simbolismo lógico como instrumento preciso para expresar pensamientos complicados.

*Ocurre que el método de las matrices nos lleva a aceptar como verdaderas algunas proposiciones cuya verdad distaba mucho de ser obvia antes de la aplicación de ese método. Damos a continuación algunos ejemplos de proposiciones de esa clase:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p),$$
$$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q),$$
$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p).$$

El hecho de que estas proposiciones no sean inmediatamente obvias, se debe principalmente a que ellas son una manifestación del uso específico de la implicación característica de la lógica moderna, esto es, el uso de la implicación en sentido material.

Estas proposiciones asumen un carácter paradójico especial si, cuando se las lee en términos de lenguaje común, se reemplaza la implicación por frases que contengan «*implica*» o «*se sigue*», o sea si les damos, por ejemplo, la siguiente forma:

si p es verdadera, entonces p se sigue de cualquier q (en otras palabras: *una proposición verdadera se sigue de cualquier proposición*);

si p es falsa, entonces p implica cualquier q (en otras palabras: *una proposición falsa implica cualquier proposición*);

para p y q cualesquiera, o bien p implica q, o bien q implica p (en otras palabras: *entre dos proposiciones arbitrarias, por lo menos una de ellas implica la otra*).

Formuladas de este modo, estas expresiones han sido frecuentemente causas de malentendidos y de discusiones superfluas. Esto confirma enteramente las observaciones hechas al finalizar la Sección 9.*

14. Aplicación de las leyes del cálculo proposicional a la inferencia

Casi todos los razonamientos en cualquier disciplina científica están basados, explícita o implícitamente, en leyes del cálculo proposicional; vamos a mostrar en un ejemplo cómo ocurre esto.

Dada una proposición que tenga la forma de una implicación, se puede formar —aparte de la recíproca (de la cual ya hemos hablado en la Sección 10)— dos proposiciones más: la PROPOSICIÓN CONTRARIA (o la CONTRARIA DE LA PROPOSICIÓN DADA) y la PRO-

POSICIÓN CONTRARRECÍPROCA. La proposición contraria se obtiene al reemplazar antecedente y consecuente de la proposición dada por sus negaciones. La contrarrecíproca es el resultado de intercambiar antecedente y consecuente en la proposición contraria; la contrarrecíproca es, por lo tanto, la recíproca de la proposición contraria y también la contraria de la proposición recíproca. Las proposiciones recíproca, contraria y contrarrecíproca, junto con la proposición original, se llaman PROPOSICIONES CONJUGADAS. Como ilustración consideremos la siguiente proposición condicional:

(I) *si x es un número positivo, entonces $2x$ es un número positivo,*

y formemos sus tres proposiciones conjugadas:

si $2x$ es un número positivo, entonces x es un número positivo;

si x no es un número positivo, entonces $2x$ no es un número positivo;

si $2x$ no es un número positivo, entonces x no es un número positivo.

En este ejemplo, todas las proposiciones conjugadas obtenidas de una proposición verdadera son asimismo verdaderas. Pero esto no ocurre en general; para ver que es posible que no sólo la proposición recíproca es falsa (como ya se ha mencionado en la Sección 10), pero que también la proposición contraria sea falsa, aunque la proposición original sea verdadera, es suficiente reemplazar «$2x$» por «x^2» en las proposiciones mencionadas más arriba.

Así vemos que de la validez de una implicación no se puede inferir nada acerca de la validez de la proposición recíproca o de la contraria. La situación es diferente en el caso de la cuarta proposición conjugada: siempre que una implicación es verdadera, también lo es su correspondiente contrarrecíproca. Este hecho se puede verificar en numerosos ejemplos y encuentra su expresión en la llamada LEY DE TRANSPOSICIÓN O DE CONTRAPOSICIÓN del cálculo proposicional.

Para formular la citada ley de un modo preciso observaremos que a toda implicación se le puede dar la forma esquemática:

si p, entonces q;

la proposición recíproca, adoptará entonces la forma:

si q, entonces p;

la contraria dirá:

si no p, entonces no q;

y la contrarrecíproca:

si no q, entonces no p.

La ley de contraposición, según la cual una proposición condicional implica la correspondiente proposición contrarrecíproca, se puede formular de la siguiente manera:

si: si p, entonces q, entonces: si no q, entonces no p;

para evitar la acumulación de la palabra «*si*», es conveniente hacer un pequeño cambio en la formulación:

(II) *de: si p, entonces q, se sigue que: si no q, entonces no p.*

Queremos mostrar ahora, que con ayuda de esta ley podemos derivar la proposición contrarrecíproca de una proposición condicional dada, por ejemplo, de la aserción (I).

La ley (II) sigue siendo válida si en ella sustituimos «*p*» y «*q*» por proposiciones o funciones proposicionales arbitrarias. En particular, podemos sustituir «*p*» y «*q*» por las expresiones:

x es un número positivo

y

2x es un número positivo.

Si, por razones estilísticas, cambiamos la posición de la palabra «*no*», obtenemos:

(III) *de: si x es un número positivo, entonces 2x es un número positivo, se sigue que: si 2x no es un número positivo, entonces x no es un número positivo.*

Comparemos ahora (I) y (III): (III) tiene la forma de una implicación y (I) es su hipótesis. Como tanto la implicación completa como su hipótesis han sido admitidas como verdaderas, también deberá admitirse como tal la conclusión de la implicación; ahora bien, esta conclusión es precisamente la contrarrecíproca de la proposición de que se trataba:

(IV) *si 2x no es un número positivo, entonces x no es un número positivo.*

De esta forma, todo el que conozca la ley de contraposición puede considerar como verdadera la proposición contrarrecíproca, siempre que haya demostrado antes la proposición original. Además, como se verifica fácilmente, la proposición contraria es la contrarrecíproca de la recíproca de la proposición original (es decir, la proposición contraria puede obtenerse de la recíproca reemplazando antecedente y consecuente por sus negaciones e intercambiándolos). Por esta razón, si se ha demostrado la recíproca de una proposición dada, entonces también la contraria puede considerarse válida. Si, por lo tanto, se han conseguido demostrar dos proposiciones —la original y su recíproca— es superfluo dar una demostración especial para las dos proposiciones conjugadas restantes.

Puede mencionarse aquí que se conocen algunas variantes de la ley de contraposición. Una de ellas es la recíproca de (II):

de: si no q, entonces no p, se sigue que: si p, entonces q.

Esta ley hace posible la deducción de la proposición original partiendo de la contrarrecíproca, y de la contraria partiendo de la recíproca.

15. Reglas de inferencia. Demostraciones completas

Ahora consideraremos algo más detalladamente el mecanismo de la demostración con cuya ayuda hemos demostrado la proposición (IV) en la Sección anterior. Además de las reglas de definición, de las que ya hemos hablado, existen también reglas de un carácter más o menos parecido, a saber, las REGLAS DE INFERENCIA

O REGLAS DE DEMOSTRACIÓN. Estas reglas, que no deben confundirse con las leyes lógicas, son instrucciones que estipulan cómo transformar proposiciones reconocidas como verdaderas en nuevas proposiciones verdaderas. En las demostraciones que hemos realizado antes, se han usado dos de estas reglas: la REGLA DE SUSTITUCIÓN y la de SEPARACIÓN (también llamada REGLA DE MODUS PONENS).

La regla de sustitución dice lo siguiente: si ya ha sido reconocida como verdadera una proposición de carácter universal que contiene variables proposicionales, y se sustituyen éstas por otras variables proposicionales, o por funciones proposicionales o por proposiciones —sobrentendiéndose que en los lugares de variables iguales deberán insertarse expresiones iguales—, la proposición obtenida de esta manera debe ser reconocida como verdadera. Aplicando esta regla, obtuvimos la proposición (III) a partir de (II). Debemos añadir, que la regla de sustitución se puede aplicar también a otros tipos de variables, como, por ejemplo, a las variables «*x*», «*y*», ..., que designan números: en lugar de dichas variables deberemos insertar entonces expresiones que designen números.

*La formulación de la regla de sustitución que hemos indicado aquí, no es muy precisa. Dicha regla se refiere a aquellas proposiciones que constan de un operador universal y de una función proposicional que contenga variables ligadas por el cuantificador universal. Si queremos aplicar la regla de sustitución, deberemos prescindir del cuantificador y colocar en lugar de las variables ligadas por aquél, otras variables o expresiones completas (por ejemplo, en lugar de las variables «*p*», «*q*», «*r*», ..., funciones proposicionales o proposiciones, en lugar de las variables «*x*», «*y*», «*z*», ..., en cambio, expresiones que designen números); si en la función proposicional intervienen todavía otras variables ligadas, se dejarán inalteradas y se cuidará de que ellas no figuren en las expresiones que se inserten; en caso necesario, se le antepondrá el cuantificador universal a la expresión obtenida de esta manera, para lograr de ella una proposición. Si aplicamos la regla de sustitución, por ejemplo, a la proposición:

para todo número x existe un número y tál que $x + y = 5$,

podemos obtener la proposición:

existe un número y tal, que $3 + y = 5$,

o también:

para todo número z existe un número y tal que $z^2 + y = 5$;

en este caso se sustituye solamente «x», sin modificar «y». No debemos, sin embargo, sustituir «x» por una expresión que contenga «y», ya que, aun siendo verdadera la proposición original, se puede llegar de esta manera a una proposición falsa. Por ejemplo, si sustituimos «3 — y» obtenemos:

existe un número y tal que $(3 - y) + y = 5$.*

La regla de separación, o modus ponens, afirma, que si se han aceptado como verdaderas dos proposiciones, teniendo una de ellas la forma de una implicación y siendo la otra el antecedente de ésta, también puede aceptarse como verdadero al consecuente de la implicación («separando», por decirlo así, el consecuente de la implicación). Valiéndonos de esta regla ha sido deducida la proposición (IV) de las proposiciones (III) y (I).

Ahora se ve, que cada paso de la demostración de la proposición (IV) dada más arriba, ha consistido en la aplicación de una regla de inferencia a proposiciones previamente aceptadas como verdaderas. Tales demostraciones son llamadas COMPLETAS. Podríamos caracterizar las demostraciones completas de una manera algo más precisa. Cada una de ellas consiste en una sucesión de proposiciones tales que: las proposiciones iniciales fueron previamente aceptadas como verdaderas; cada proposición subsiguiente se obtiene de algunas de las que las preceden aplicando una regla de inferencia; y, finalmente, la última proposición es la que se quiere demostrar.

Debe observarse en este punto, qué forma tan extremadamente elemental —desde el punto de vista psicológico— adoptan los razonamientos matemáticos, gracias al conocimiento y aplicación de las leyes de la lógica y de las reglas de inferencia: procesos com-

plicados de pensamiento pueden reducirse completamente a actividades tan simples como son la observación atenta de proposiciones aceptadas como verdaderas, la percepción de conexiones estructurales, puramente externas, entre dichas proposiciones y la realización de transformaciones mecánicas prescritas por las reglas de inferencia. Está claro, además, que procediendo de esta manera la posibilidad de cometer errores en la demostración disminuye considerablemente.

Ejercicios

1. Indicar ejemplos de expresiones específicamente matemáticas de los dominios de la aritmética y de la geometría.

2. Distinguir en las dos proposiciones siguientes las expresiones específicamente matemáticas de aquellas expresiones que pertenecen al dominio de la lógica:

(a) *para números cualesquiera* x *e* y, *si* $x > 0$ *e* $y < 0$, *entonces existe un número* z *tal que* $z < 0$ *y* $x = y \cdot z$;

(b) *para puntos arbitrarios* A *y* B, *existe un punto* C *que está situado entre* A *y* B *y a la misma distancia de* A *que de* B.

3. Formar la conjunción de las negaciones de las funciones proposicionales siguientes:

$$x < 3$$

y

$$x > 3.$$

¿Qué número satisface esta conjunción?

4. Investigar con cuál de las dos significaciones conocidas figura la palabra «o» en las siguientes proposiciones:

(a) *dos caminos le estaban abiertos: traicionar a la patria o morir;*

(b) *si ganase mucho dinero o me premiase la lotería, emprendería un largo viaje.*

Indicar algunos otros ejemplos en los que la palabra «*o*» se use en su primera o en su segunda significación.

*5. Considérense las siguientes proposiciones condicionales:

(a) *si hoy es lunes, entonces mañana es martes;*

(b) *si hoy es lunes, entonces mañana es sábado;*

(c) *si hoy es lunes, entonces el 25 de diciembre es Navidad;*

(d) *si los deseos fueran caballos, los mendigos cabalgarían;*

(e) *si un número es divisible por* 2 *y por* 6, *entonces es divisible por* 12;

(f) *si* 18 *es divisible por* 3 *y por* 4, *entonces* 18 *es divisible por* 6.

¿Cuáles de estas implicaciones son verdaderas y cuáles son falsas desde el punto de vista de la lógica matemática? ¿En qué casos la cuestión del significado y de la verdad o falsedad ofrecen alguna duda desde el punto de vista del lenguaje ordinario? Diríjase especial atención a la proposición (b) y examínese la cuestión de su verdad haciéndola depender del día de la semana en el cual ella es formulada.

6. Poner los teoremas siguientes en forma de proposiciones condicionales.

(a) *para que un triángulo sea equilátero, es suficiente que todos sus ángulos sean congruentes;*

(b) *la condición: x es divisible por* 3, *es necesaria para que x sea divisible por* 6.

Indicar otras formulaciones para las dos proposiciones expuestas.

7. ¿Es la condición:

$$x \cdot y > 4$$

suficiente, o necesaria para que sea válido:

$$x > 2 \quad e \quad y > 2 \;?$$

8. Indicar formulaciones alternativas para las proposiciones siguientes:

(a) *x es divisible por 10 si, y sólo si, es divisible por 2 y por 5;*

(b) *para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es necesario y suficiente que el punto de intersección de sus diagonales sea también el punto medio de éstas.*

Indicar otros ejemplos de teoremas del campo de la aritmética y de la geometría que tengan la forma de equivalencias.

9. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas?

(a) *un triángulo es isósceles si, y sólo si, todas sus alturas son congruentes;*

(b) *la condición que $x \neq 0$ es necesaria y suficiente para que x^2 sea un número positivo;*

(c) *de que un cuadrilátero sea un cuadrado se deduce que todos sus ángulos son ángulos rectos, y recíprocamente;*

(d) *para que x sea divisible por 8, es necesario y suficiente que x sea divisible por 4 y por 2.*

10. Suponiendo conocidos los términos «*número natural*», «*producto*» (o «*cociente*», respectivamente), construir la definición de la expresión «*divisible*» dándole la forma de una equivalencia:

decimos que x es divisible por y, si, y sólo si, ...

Formúlese del mismo modo la definición de la expresión «*paralela*»; ¿qué términos del dominio de la geometría deben suponerse conocidos para ello?

11. Tradúzcase al lenguaje ordinario las siguientes expresiones simbólicas:

(a) $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$,

(b) $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$,

(c) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$,

(d) $\sim p \vee [q \leftrightarrow (p \rightarrow q)]$.

Nótese con especial atención la dificultad de distinguir en el lenguaje ordinario las tres últimas expresiones.

12. Formúlense las siguientes expresiones en simbolismo lógico:

(a) *si no p o no q, entonces no es el caso que p o q;*

(b) *si p implica que q implica r, entonces p y q juntas implican r;*

(c) *si r se sigue de p y si r se sigue de q, entonces r se sigue de p o q.*

13. Constrúyanse tablas de verdad para todas las funciones proposicionales dadas en los Ejercicios 11 y 12. Supóngase que interpretamos estas funciones como proposiciones (¿qué quiere decir esto?), y determínese cuáles de esas proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

14. Verifíquese por el método de las tablas de verdad que las siguientes proposiciones son verdaderas:

(a) $\sim\, \sim p \leftrightarrow p$,

(b) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$,
$\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$,

(c) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,
$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

La proposición (a) es la LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN, las proposiciones (b) son las llamadas LEYES DE DE MORGAN[1], y las proposiciones (c) son las LEYES DISTRIBUTIVAS (de la multiplicación lógica con respecto a la suma y de la suma lógica con respecto a la multiplicación).

15. Indíquense las tres conjugadas (recíproca, contraria y contrarrecíproca) de cada una de las proposiciones siguientes:

(a) *el hecho que x es un número positivo implica que $-x$ es un número negativo;*

---

[1] Estas leyes fueron formuladas por el eminente lógico inglés A. DE MORGAN (1806-1878).

(b) *si un cuadrilátero es rectángulo, entonces dicho cuadrilátero será inscriptible en un círculo.*

¿Cuáles de las proposiciones conjugadas son verdaderas?

Indicar un ejemplo de cuatro proposiciones conjugadas que sean todas falsas.

16. Explicar el siguiente hecho por medio de la tabla de verdad correspondiente a la función «$p \leftrightarrow q$»: si en una proposición cualquiera alguna de sus partes que sean a su vez proposiciones (o funciones proposicionales) se reemplazan por proposiciones (o funciones) equivalentes, entonces la nueva proposición total que se obtiene de este modo es equivalente a la proposición original. Algunas de nuestras afirmaciones y advertencias de la Sección 10 dependen de este hecho; indicar dónde se presenta el caso.

17. Considérense las dos proposiciones siguientes:

(a) *de: si p, entonces q, se sigue que: si q, entonces p;*

(b) *de: si p, entonces q, se sigue que: si no p, entonces no q.*

Supongamos que estas proposiciones fueran leyes lógicas, ¿sería posible aplicarlas en las demostraciones matemáticas en modo análogo a la ley de contraposición (cf. Sección 14)? ¿Qué proposiciones conjugadas sería posible obtener de una implicación dada? En consecuencia, ¿puede mantenerse nuestra suposición de que las proposiciones (a) y (b) son verdaderas?

18. Confirmar la conclusión que se obtuvo en el Ejercicio 17 aplicando el método de las tablas de verdad a las proposiciones (a) y (b).

19. Consideremos las dos expresiones siguientes:

el hecho de que ayer fue lunes implica que hoy es martes;

el hecho de que hoy es martes implica que mañana será miércoles.

¿Qué proposición puede deducirse de ellas de acuerdo con la ley del silogismo hipotético (cf. Sección 12)?

*20. Desarróllese la prueba completa de la proposición obtenida en el ejercicio precedente; úsense las proposiciones y la ley del silogismo hipotético mencionados en el mismo, y aplíquense —además de las reglas de sustitución y separación— la siguiente regla de inferencia: si dos proposiciones cualesquiera son aceptadas como verdaderas, entonces su conjunción también es verdadera.

III

SOBRE LA TEORÍA DE LA IDENTIDAD

16. Conceptos lógicos fuera del cálculo proposicional. Concepto de identidad

El cálculo proposicional, al que hemos dedicado el capítulo anterior, constituye sólo una parte de la lógica. Es indudablemente la parte más fundamental, al menos en el sentido de que para la definición de conceptos y para la formulación y demostración de leyes lógicas no pertenecientes al cálculo proposicional, hay que usar los conceptos y leyes de dicho cálculo. Pero éste no constituye de por sí una base suficiente para la fundamentación de otras ciencias, ni, en particular, de la matemática; en las definiciones, teoremas y demostraciones matemáticos aparecen continuamente distintos conceptos de otras partes de la lógica. En éste y en los dos capítulos siguientes nos ocuparemos con algunos de éstos.

Entre los conceptos lógicos no pertenecientes al cálculo proposicional, el de más importancia es, probablemente, el concepto de IDENTIDAD. Aparece en frases como:

x es idéntico a y,
x es lo mismo que y,
x es igual a y.

A estas tres expresiones se les adjudica el mismo sentido. Para abreviar, pueden reemplazarse por la expresión simbólica:

$$x = y.$$

En lugar de escribir:

x no es idéntico a y

o:

x es diferente de y,

empleamos la fórmula:

$$x \neq y.$$

Las leyes generales que gobiernan las expresiones anteriores constituyen una parte de la lógica que puede ser llamada TEORÍA DE LA IDENTIDAD.

17. Leyes fundamentales de la teoría de la identidad

Entre las leyes lógicas referentes al concepto de identidad la más fundamental es:

I. $x = y$ *si, y sólo si, x tiene toda propiedad que tiene y, e y tiene toda propiedad que tiene x.*

Podríamos decir, más simplemente:

$x = y$ *si, y sólo si, x e y tienen toda propiedad en común.*

Se conocen otras formulaciones quizá más evidentes, aunque menos correctas, de esta misma ley; por ejemplo:

$x = y$ *si, y sólo si, todo lo que puede decirse de uno de los objetos x o y, puede también decirse del otro.*

La ley I fue enunciada por primera vez por LEIBNIZ[1] (aunque en términos algo diferentes) y puede, por lo tanto, ser llamada LEY DE LEIBNIZ. Ella tiene la forma de una equivalencia, y nos permite reemplazar la fórmula:

$$x = y,$$

[1] Cf. nota 1 en la página 42.

que es el miembro izquierdo de la equivalencia, por su miembro derecho, esto es, por una expresión en la cual el símbolo de identidad ya no aparece. Con respecto a su forma, por lo tanto, esta ley puede considerarse como la definición del símbolo «=», y así fue considerada por LEIBNIZ. (Por supuesto, únicamente tendría sentido considerar aquí la ley de LEIBNIZ como una definición, si el significado del símbolo «=» nos pareciera menos evidente que el de las expresiones que aparecen en el miembro de la ley, tal como «*x tiene toda propiedad que tiene y*»; cf. Sección 11.)

Como consecuencia de la ley de LEIBNIZ tenemos la siguiente regla de gran importancia práctica: si en un cierto contexto se ha asumido o demostrado una identidad, por ejemplo:

$$x = y,$$

entonces en cualquier fórmula o proposición que aparezca en dicho contexto puede reemplazarse el miembro izquierdo de la identidad por su miembro derecho, por ejemplo «*x*» por «*y*», y recíprocamente. Se entiende que si «*x*» tiene varias presentaciones en una fórmula, algunas de ellas pueden reemplazarse por «*y*» y otras dejarse inalteradas. Hay así, por lo tanto, una diferencia esencial entre la regla que ahora estamos considerando y la regla de sustitución discutida en la Sección 15, en la cual no se permitían tales reemplazos parciales de un símbolo por otro.

De la ley de LEIBNIZ se puede deducir una serie de otras leyes pertenecientes a la teoría de la identidad que son aplicadas muy a menudo en consideraciones diversas y especialmente en demostraciones matemáticas. Mencionaremos aquí las más importantes de éstas y al mismo tiempo indicaremos esquemáticamente sus demostraciones, para poner de manifiesto con ejemplos concretos que no existe ninguna diferencia esencial entre los razonamientos del dominio de la lógica y los del dominio de la matemática.

II. *Todo objeto es igual a sí mismo:* $x = x$.

DEMOSTRACIÓN. Sustituyendo en la ley de LEIBNIZ, «*x*» en lugar de «*y*», obtenemos:

$x = x$ si, y sólo si, x tiene toda propiedad que tiene x, y x tiene toda propiedad que tiene x.

Evidentemente esta proposición puede simplificarse omitiendo su última parte «*y x tiene...*» (esto se sigue directamente de la ley de tautología enunciada en la Sección 12). La proposición toma entonces la siguiente forma:

$x = x$ si, y sólo si, x tiene toda propiedad que tiene x.

Obviamente el miembro derecho de esta equivalencia se satisface siempre (ya que, de acuerdo a la ley de identidad de la Sección 12, si x tiene una cierta propiedad, entonces x tiene esa propiedad). Por lo tanto, el miembro izquierdo de la equivalencia debe también satisfacerse; en otras palabras, tenemos siempre:

$$x = x,$$

como se trataba de demostrar.

III. *Si $x = y$*, entonces $y = x$.

Demostración. Sustituyendo «x» por «y» e «y» por «x» en la ley de Leibniz, obtenemos:

$y = x$ si, y sólo si, y tiene toda propiedad que tiene x, y x tiene toda propiedad que tiene y.

Comparemos esta proposición con la formulación original de la ley de Leibniz. Tenemos entonces dos equivalencias cuyos miembros derechos son conjunciones que difieren únicamente en el orden de sus miembros. Por lo tanto, los miembros derechos son equivalentes (cf. la ley conmutativa de la multiplicación lógica en la Sección 13), y los miembros izquierdos, esto es, las fórmulas:

$$x = y \quad \text{e} \quad y = x$$

deben ser también equivalentes. A fortiori, podemos afirmar que la segunda de estas fórmulas se sigue de la primera, tal como dice nuestra ley.

IV. *Si* $x = y$ *e* $y = z$, *entonces* $x = z$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, las dos fórmulas:

(1) $$x = y$$

e

(2) $$y = z$$

se asumen como válidas. De acuerdo a la ley de LEIBNIZ se sigue de la fórmula (2) que todo lo que puede decirse de y puede también decirse de z. Por lo tanto, podemos reemplazar la variable «y» por «z» en la fórmula (1), y obtener la fórmula deseada:

$$x = z.$$

V. *Si* $x = z$ *e* $y = z$, *entonces* $x = y$; en otras palabras, *dos objetos iguales a un tercero son iguales entre sí*.

Esta ley puede demostrarse de manera análoga a la precedente (y puede también ser deducida de las leyes III y IV sin usar la ley de LEIBNIZ).

Las leyes II, III y IV son llamadas LEYES DE REFLEXIVIDAD, DE SIMETRÍA y DE TRANSITIVIDAD para la relación de identidad.

18. Identidad de objetos e identidad de sus designaciones; uso de comillas

*Aunque el significado de expresiones tales como:

$$x = y \quad \text{o} \quad x \neq y$$

parece ser evidente, estas expresiones son a veces objeto de malentendidos. Parece obvio, por ejemplo, que la fórmula:

$$3 = 2 + 1$$

es una proposición verdadera, y sin embargo, algunos dudan su verdad. En su opinión, esta fórmula parece indicar que los sím-

bolos «3» y «2 + 1» son idénticos, lo cual es evidentemente falso, pues esos símbolos tienen formas completamente distintas, y por lo tanto no es cierto que todo lo que puede afirmarse de uno de esos símbolos pueda también afirmarse del otro (por ejemplo, el primer símbolo está constituido por un solo signo y el segundo no).

Con el objeto de suprimir dificultades de este tipo, es conveniente ver con claridad un principio muy importante y general, del cual depende la utilidad del empleo de cualquier lenguaje. De acuerdo con este principio, cuando en una proposición deseamos decir algo de cierto objeto, debemos usar el nombre o designación de dicho objeto y no el objeto mismo.

La aplicación de este principio no ofrece ninguna duda mientras el objeto del cual se habla no sea una palabra, un símbolo o, en general, una expresión de un lenguaje. Imaginemos, por ejemplo, que tenemos ante nosotros una pequeña piedra azul, y que enunciamos la siguiente proposición:

esta piedra es azul.

En este caso, es de presumir que a nadie se le ocurriría reemplazar las palabras «*esta piedra*», que constituyen en conjunto la designación del objeto, por el objeto mismo; es decir, tachar o recortar estas palabras y colocar en su lugar la piedra. Porque si hiciéramos eso obtendríamos una totalidad constituida en parte por una piedra y en parte por palabras, y esto no es una expresión lingüística, y mucho menos una proposición verdadera.

Sin embargo, este principio es frecuentemente violado cuando sucede que el objeto del cual se habla es una palabra o un símbolo. Y, no obstante, la aplicación del principio es indispensable también en este caso; porque, de otro modo, obtendríamos una totalidad que, a pesar de ser una expresión lingüística, no expresaría nuestro pensamiento, muy a menudo resultaría ser un agregado de palabras carente de significación. Consideremos, por ejemplo, las dos palabras siguientes:

bien, *María*.

Está claro que la primera consiste de cuatro letras y que la segunda es un nombre propio. Pero supongamos que deseamos ex-

presar estos pensamientos, que son absolutamente correctos, de la siguiente manera:

(I) *bien consiste de cuatro letras;*

(II) *María es un nombre propio.*

Entonces, al hablar sobre palabras, habríamos usado las palabras mismas y no sus nombres. Y si examinamos más de cerca las expresiones (I) y (II), debemos admitir que la primera no es en absoluto una proposición, puesto que el sujeto sólo puede ser un sustantivo y no un adverbio, mientras que la segunda podría considerarse como proposición significativa; pero, en todo caso, sería una proposición falsa, puesto que ninguna mujer es un nombre propio.

Para evitar estas dificultades podríamos suponer que las palabras «*bien*» y «*María*» se emplean en contextos tales como (I) y (II) con un significado distinto que su significado usual, y que ellas desempeñan aquí la función de ser su propio nombre. Como generalización de este punto de vista deberíamos admitir que cualquier palabra puede, a veces, funcionar como su propio nombre; para usar la terminología de la lógica medieval, podríamos decir que en casos como éste, la palabra es usada en SUPPOSITIO MATERIALIS, por oposición a su uso en SUPPOSITIO FORMALIS; esto es, en su significado ordinario. En consecuencia, toda palabra del lenguaje común o científico poseería por lo menos dos significados diferentes, y no es necesario buscar ejemplos muy lejanos de situaciones en las que podrían surgir serias dudas acerca de cuál de ambos significados es el que debe entenderse. No deseamos aceptar esta consecuencia, y por lo tanto introduciremos la regla de que toda expresión debe ser diferente (por lo menos en escritura) de su nombre.

Aparece entonces el problema de formar nombres para palabras y expresiones. Existen varios artificios para lograrlo. El más simple de ellos se basa en la convención de que para formar el nombre de una expresión debe colocarse esa expresión entre comillas. Sobre la base de esta convención los pensamientos que intentamos formular en (I) y (II) pueden ahora enunciarse correctamente y sin ambigüedad de este modo:

(I′) *«bien» consiste de cuatro letras;*

(II′) *«María» es un nombre propio.*

A la luz de estas observaciones desaparecen todas las posibles dudas acerca del significado y de la verdad de ciertas fórmulas como:

$$3 = 2 + 1.$$

Esta fórmula contiene símbolos que designan ciertos números, pero no contiene el nombre de ninguno de esos símbolos. Por lo tanto, esta fórmula afirma algo acerca de números y no acerca de símbolos que designan números; los números 3 y $2 + 1$ son evidentemente iguales, por lo cual la fórmula es una proposición verdadera. Es claro que podemos reemplazar esta fórmula por una proposición equivalente que se refiera a símbolos; a saber, podemos decir que los símbolos «3» y «2 + 1» designan el mismo número. Pero esto no implica de ningún modo que los símbolos mismos sean idénticos; porque es bien sabido que el mismo objeto —y en particular, el mismo número— puede tener diferentes designaciones. Los símbolos «3» y «2 + 1» son, sin duda, diferentes, y este hecho puede expresarse mediante una nueva fórmula:

$$«3» \neq «2 + 1»,$$

lo cual no contradice en absoluto la fórmula enunciada previamente[1].*

19. La igualdad en la aritmética y en la geometría, y su relación con la identidad lógica

Consideraremos aquí la igualdad aritmética entre números como un caso especial del concepto general de identidad lógica. Sin embargo, debemos advertir que hay matemáticos —contra el punto de vista sustentado aquí— que no identifican el signo «=», usual

[1] En este libro respetamos consecuentemente la convención relativa al uso de las comillas. Sólo nos apartaremos de ella en raras ocasiones, como concesión al uso tradicional. Por ejemplo, enunciaremos fórmulas de proposiciones sin comillas, si ellas están impresas con tipo grande en una línea especial o si aparecen en la formulación de teoremas matemáticos o lógicos; y no colocamos entre comillas las expresiones que están precedidas por frases como «es llamado», «se conoce con el nombre de», etc. Pero en estos casos se toman otras medidas de precaución; la expresión en cuestión es precedida a menudo por dos puntos y va impresa usualmente en diferente tipo de imprenta (mayúsculas pequeñas o bastardilla). Obsérvese que, en el lenguaje diario, las comillas se usan también en casos que no están comprendidos por la mencionada convención; y ejemplos de este tipo pueden encontrarse también en este libro.

en la aritmética, con el símbolo de identidad lógica, no consideran como necesariamente idénticos a los números iguales y, por consiguiente, consideran la igualdad entre números, como un concepto específico de la aritmética. En relación con ello, estos matemáticos se apartan de la ley de LEIBNIZ en su forma general, aun reconociendo varias consecuencias de carácter menos amplio resultantes de aquélla e incluyéndolas entre los teoremas específicamente matemáticos. Entre tales consecuencias se hallan, por ejemplo, las leyes II a V de la Sección 17, así como otros teoremas que establecen que si $x = y$, y x satisface a una fórmula construida exclusivamente con ayuda de símbolos aritméticos, entonces también y satisface dicha fórmula, como por ejemplo, el teorema:

$$si\ x = y \quad y \quad x < z,\ entonces\ y < z.$$

Según nuestra opinión, este punto de vista no se caracteriza por ninguna ventaja teórica en especial, y en la práctica origina grandes complicaciones en la exposición de la aritmética, ya que se rechaza la regla general que permite —bajo la hipótesis de que una cierta ecuación es válida— reemplazar en cualquier expresión el miembro izquierdo de la ecuación por el miembro derecho; pero como estos reemplazos son imprescindibles en muchos razonamientos, se vuelve necesario dar demostraciones especiales de que el reemplazo es legítimo para cada caso particular en que éste es aplicado.

Para ilustrar ésta situación, consideremos un sistema cualquiera de ecuaciones con dos variables; por ejemplo:

$$x = y^2,$$

$$x^2 + y^2 = 2x - 3y + 18.$$

Si quisiéramos resolver este sistema de ecuaciones con ayuda del llamado método de sustitución, formaríamos un nuevo sistema de ecuaciones dejando la primera sin cambiar, y reemplazando todas las presentaciones de «x» en la segunda por «y^2». Cabe preguntarse ahora si esta transformación es legítima, es decir, si el segundo sistema es equivalente al primero. La respuesta es afirmativa, sin duda alguna, independientemente del concepto de igualdad entre números que se adopte. Pero, si el símbolo «=»

denota la identidad lógica, y aceptamos la ley de LEIBNIZ, la respuesta será entonces evidente; siendo:

$$x = y^2,$$

estará permitido sustituir «x» por «y^2» dondequiera que intervenga, y recíprocamente; en caso contrario, debería fundamentarse esta respuesta, y aunque en realidad la fundamentación no ofrecería ninguna dificultad, sería, sin embargo, larga y tediosa.

La situación es completamente distinta en relación con el concepto de identidad en la geometría. Cuando llamamos iguales o congruentes a dos figuras geométricas, como, por ejemplo, dos segmentos, dos ángulos o dos polígonos, no queremos afirmar, en general, que dichas figuras sean idénticas; con ello decimos solamente que estas figuras tienen el mismo tamaño y la misma forma, o con otras palabras, si queremos servirnos de un modo de hablar figurativo, aunque no completamente correcto, que se las puede superponer de manera que coincidan entre sí. Así, un triángulo, por ejemplo, podrá tener dos o incluso los tres lados iguales, pero ciertamente estos lados no son idénticos. Hay también casos, por otra parte, en los que ya no se trata de la igualdad geométrica de dos figuras, sino de su identidad lógica; por ejemplo, en un triángulo isósceles la altura relativa a la base y la mediatriz de ésta no son solamente iguales en sentido geométrico, son simplemente un mismo segmento. Por lo tanto, para evitar confusión, en aquellos casos en que no se trate de identidad lógica, sería recomendable evitar el término «igualdad»; en lugar de figuras iguales en sentido geométrico, hablar siempre de figuras congruentes y reemplazar el símbolo «$=$» por otro símbolo cualquiera, como por ejemplo, «$\cong$» (lo que, por lo demás, suele hacerse a menudo).

20. Los cuantificadores numéricos

Con ayuda del concepto de identidad se puede precisar el sentido de ciertas frases relacionadas, por su contenido y por su función, con los cuantificadores universal y existencial, pero que poseen un carácter más especial. Se trata de expresiones como las siguientes:

existe al menos un, o *a lo sumo un*, o *exactamente un*, *objeto x tal que...*,

existen al menos dos, o *a lo sumo dos*, o *exactamente dos*, *objetos x tales que...*,

y así sucesivamente; se puede denominarlas CUANTIFICADORES NUMÉRICOS. Aparentemente, en estas frases se presentan términos específicamente matemáticos, a saber, los numerales «*uno*», «*dos*», etcétera. Pero un análisis más detenido muestra que el contenido de estas frases (consideradas en su totalidad) es de naturaleza puramente lógica. En la expresión, por ejemplo,

existe al menos un objeto que satisface la condición dada,

las palabras «*al menos un*» pueden sustituirse simplemente por el artículo «*un*» sin alterar el sentido. La expresión:

existe a lo sumo un objeto que satisface la condición dada

significa lo mismo que:

para todo x e y, si x e y satisfacen la condición dada, entonces $x = y$.

La proposición:

existe exactamente un objeto que satisface la condición dada

es equivalente a la conjunción de las dos expresiones recién mencionadas:

existe al menos un objeto que satisface la condición dada, y al mismo tiempo, a lo sumo un objeto que satisface dicha condición.

A la expresión:

existen al menos dos objetos que satisfacen la condición dada,

le atribuimos el sentido siguiente:

existen objetos x e y tales que x e y satisfacen la condición dada y $x \neq y$,

y es, por lo tanto, equivalente a la negación de:

existe a lo sumo un objeto que satisface la condición dada.

De manera análoga se explica el significado de otras expresiones de esta categoría.

Para aclarar esto último, presentaremos algunas proposiciones verdaderas de la aritmética en que intervienen cuantificadores numéricos:

existe exactamente un número x *tal que* $x + 2 = 5$;

existen exactamente dos números y *tales que* $y^2 = 4$;

existen al menos dos números z *tales que* $z + 2 < 6$.

La parte de la lógica en la cual se establecen las leyes generales de los cuantificadores, se llama TEORÍA DE LAS VARIABLES APARENTES o CÁLCULO FUNCIONAL, aunque debería llamarse en realidad CÁLCULO DE CUANTIFICADORES. Hasta ahora esta teoría se ha ocupado principalmente de los cuantificadores universal y existencial, mientras que no se ha prestado mayor atención a los cuantificadores numéricos.

Ejercicios

1. Demuéstrese la ley V de la Sección 17 usando exclusivamente las leyes III y IV (y, por lo tanto, sin usar la ley de LEIBNIZ).

Indicación: En la ley V, las fórmulas:

$$x = z \quad \text{e} \quad y = z$$

se asumen válidas por hipótesis. En virtud de la ley III, intercámbiense las variables en la segunda de estas fórmulas, y luego aplíquese la ley IV.

2. Pruébese la siguiente ley:

si $x = y$, $y = z$ *y* $z = t$, *entonces* $x = t$

usando exclusivamente la ley IV de la Sección 17.

3. ¿Son verdaderas las proposiciones que se obtienen reemplazando en las leyes III y IV de la Sección 17, el símbolo «=» por «≠»?

*4. Sobre la base de la convención expuesta en la Sección 18 acerca del uso de comillas, determinar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones verdaderas:

(a) 0 *es un entero,*
(b) 0 *es una cifra que tiene forma de óvalo,*
(c) «0» *es un entero,*
(d) «0» *es una cifra que tiene forma de óvalo,*
(e) $1{,}5 = 3/2$,
(f) «1,5» = «3/2»,
(g) $2 + 2 \neq 5$,
(h) «2 + 2» ≠ «5».

*5. Para formar el nombre de una palabra se coloca esa palabra entre comillas; para formar el nombre de ese nombre se coloca, a su vez, el nombre de la palabra entre comillas, y así queda la palabra misma comprendida entre comillas dobles. Así, de las tres expresiones siguientes:

Juan, «*Juan*», «"*Juan*"»

la segunda es el nombre de la primera y la tercera es el nombre de la segunda. Sustitúyanse por turno las tres expresiones mencionadas en lugar de «x» en las siguientes funciones proposicionales, y determínese cuáles de las doce proposiciones obtenidas son verdaderas:

(a) x *es un hombre,*
(b) x *es el nombre de un hombre,*
(c) x *es una expresión,*
(d) x *es una expresión que contiene comillas.*

*6. En la Sección 9 hemos dado varias formulaciones de proposiciones condicionales que se encuentran en los libros de matemáticas. También hemos llamado la atención sobre el hecho

de que, en algunas de estas expresiones, se habla, no acerca de números o de propiedades de números, etc., sino acerca de expresiones (por ejemplo, proposiciones y funciones proposicionales). Se sigue de las observaciones hechas en la Sección 18 que estas últimas formulaciones requieren el uso de comillas. Indíquense las formulaciones que requieren el uso de comillas, y el lugar exacto en que éstas deben colocarse.

*7. Sobre la base del principio general relativo al uso de nombres de objetos en proposiciones que afirman algo acerca de esos objetos, podemos someter la penúltima proposición de la Sección 12 («Así como los teoremas aritméticos de carácter universal...») a cierta crítica. Sabemos que las variables que aparecen en la aritmética están en lugar de nombres de números. ¿Están las variables que aparecen en el cálculo proposicional en lugar de nombres de proposiciones o de proposiciones? En consecuencia, ¿podemos decir, si deseamos ser exactos, que las leyes de ese cálculo afirman algo sobre las proposiciones y sus propiedades?

8. Consideremos un triángulo cuyos lados sean a, b y c. Sean h_a, h_b y h_c las tres alturas relativas a los lados a, b, c; análogamente, sean m_a, m_b y m_c las mediatrices, y s_a, s_b y s_c las bisectrices de los ángulos del triángulo.

Supongamos que el triángulo considerado sea isósceles y que sea a su base y b y c los lados iguales. ¿Cuáles de los doce segmentos indicados son entonces congruentes (es decir, iguales en sentido geométrico) y cuáles idénticos? Exprésese la respuesta con ayuda de fórmulas y utilícese para ello el símbolo «$\cong$» para la congruencia y el símbolo «$=$» para la identidad.

Resuélvase el mismo ejercicio bajo la hipótesis de que el triángulo considerado sea equilátero.

9. Aclárese la significación de las expresiones:

(a) *existen a lo sumo dos objetos que satisfacen la condición dada;*

(b) *existen dos objetos que satisfacen la condición dada.*

10. Determínese cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas:

(a) *existe exactamente un número x tal que $x + 3 = 7 - x$;*

(b) *existen exactamente dos números x tales que $x^2 + 4 = 4x$;*

(c) *existen a lo sumo dos números y tales que $y + 5 < 11 - 2y$;*

(d) *existen por lo menos tres números z tales que $z^2 < 2z$;*

(e) *para todo número x, existe un número y tal que $x + y = 2$;*

(f) *para todo número x, existe exactamente un número y tal que $x \cdot y = 3$.*

11. ¿Cómo puede expresarse, con ayuda de los cuantificadores numéricos, que la ecuación:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

tiene dos raíces?

12. ¿Qué numeros x satisfacen la función proposicional:

existen exactamente dos números y tales que $x = y^2$?

Distínganse en esta función las variables libres y ligadas. *¿Hay variables ligadas por cuantificadores numéricos?*

13. Considérese la siguiente función proposicional:

(a) *existen x, y, z, tales que $x < a$, $y < a$, $z < a$, $x \neq y$, $x \neq z$ e $y \neq z$.*

Exprésese (a) usando cuantificadores numéricos. Formúlese (a) usando los símbolos introducidos en los capítulos I y II. *Tradúzcase la siguiente fórmula (b) al lenguaje ordinario e inténtese demostrar que es equivalente a (a):

(b) $\underset{x,y}{\mathsf{A}}\,[(x < a \wedge y < a) \rightarrow \underset{z}{\mathsf{E}}\,[z < a \wedge x \neq z \wedge y \neq z]]$.

IV

SOBRE LA TEORÍA DE CLASES

21. Clases y sus elementos

Además de los objetos individuales aislados, que llamaremos INDIVIDUOS, en la lógica se estudian CLASES de objetos; en la vida cotidiana así como en matemática, las clases son más a menudo llamadas CONJUNTOS. Por ejemplo, la aritmética trata frecuentemente con conjuntos de números y, en geometría, nuestro interés no se dirige tanto a los puntos aislados como a los conjuntos de puntos (a saber, a las configuraciones geométricas). Clases de individuos son llamadas CLASES DE PRIMER ORDEN. Aunque con menos frecuencia, en nuestras investigaciones también encontraremos CLASES DE SEGUNDO ORDEN, es decir, clases que consisten, no de individuos, sino de clases de primer orden. A veces hay que considerar también CLASES DE TERCER, CUARTO, ..., ÓRDENES. En este libro nos ocuparemos casi exclusivamente de clases de primer orden, y sólo excepcionalmente —como en la Sección 26— tendremos que ocuparnos de clases de segundo orden; sin embargo, nuestras consideraciones pueden aplicarse casi sin modificaciones a clases de cualquier orden.

Para distinguir entre individuos y clases (y también entre clases de distintos órdenes), usamos como variables letras de tipos diferentes y pertenecientes a diferentes alfabetos. Es usual designar los objetos aislados, como por ejemplo los números, por letras minúsculas, y los conjuntos de éstos por mayúsculas, del alfabeto latino; en la geometría elemental, en cambio, está más

extendida la costumbre contraria: con las letras mayúsculas se designan puntos, y con las minúsculas (latinas o griegas), conjuntos de ellos.

La parte de la lógica en que se analiza el concepto de clase y se estudian sus propiedades generales, se denomina TEORÍA DE CLASES; a veces, esta teoría se trata como una disciplina matemática autónoma, y como tal, se la llama entonces TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS[1].

En la teoría de clases, desempeñan un papel fundamental expresiones como las siguientes:

el objeto x es un elemento de la clase K,

el objeto x pertenece a la clase K,

la clase K contiene como elemento al objeto x;

consideraremos estas expresiones como teniendo el mismo significado y las sustituiremos, por razones de brevedad, por la fórmula:

$$x \in K.$$

Si, por ejemplo, **I** es el conjunto de todos los números enteros, los números 1, 2, 3, ... serán sus elementos, y los números 2/3, $2\,{}^1/_2$, ..., no pertenecerán, en cambio, a este conjunto; las fórmulas:

$$1 \in \mathbf{I},\ 2 \in \mathbf{I},\ 3 \in \mathbf{I},\ \ldots,$$

son verdaderas, mientras que:

$$2/3 \in \mathbf{I},\ 2\,{}^1/_2 \in \mathbf{I},\ \ldots,$$

son falsas.

---

[1] Los principios de la teoría de clases —mejor dicho, de aquella parte de esta teoría que más adelante llamaremos cálculo de clases— se encuentran ya en BOOLE (véase nota 1 en la pág. 42). En realidad, el creador de la teoría de conjuntos como disciplina matemática autónoma ha sido el gran matemático alemán G. CANTOR (1845-1918). A él le debemos, en particular, el análisis de los conceptos de coordinabilidad, número cardinal, infinitud y orden de que hablaremos en el transcurso del presente capítulo y de los subsiguientes.

La teoría de conjuntos de CANTOR es una de las disciplinas matemáticas que se encuentran en un estado de desarrollo especialmente intensivo; sus ideas y razonamientos se han introducido en casi todas las partes de la matemática, y han ejercido una influencia estimulante y fructífera.

22. Clases y funciones proposicionales con una variable libre

Consideremos una función proposicional con una variable libre, por ejemplo:

$$x > 0.$$

Si le prefijamos las palabras:

(I) *el conjunto de todos los números x tales que*

obtenemos la expresión:

el conjunto de todos los números x tales que $x > 0$.

Esta expresión designa un conjunto bien determinado, a saber, el conjunto de todos los números positivos; éste es el conjunto que tiene por elementos a los números que satisfacen la función proposicional dada, y sólo a ellos. Si designamos este conjunto con el símbolo «**P**» nuestra función se hace equivalente a:

$$x \in \mathbf{P}.$$

Podemos aplicar un procedimiento análogo a cualquier otra función proposicional. En aritmética se pueden obtener de esta manera varios conjuntos de números, por ejemplo, el conjunto de todos los números negativos o el conjunto de todos los números que son mayores que 2 y menores que 5 (o sea que satisfacen la función «$x > 2$ *y* $x < 5$»). Este procedimiento desempeña también un papel importante en geometría, especialmente en la definición de nuevas clases de configuraciones geométricas; la superficie de una esfera se define, por ejemplo, como el conjunto de todos los puntos del espacio que están a una determinada distancia de un punto dado. Es costumbre, en geometría, reemplazar las palabras *«el conjunto de todos los puntos»* por *«el lugar geométrico de los puntos»*.

Ahora daremos a las anteriores observaciones una forma general. Se admite en lógica que, a toda función proposicional que

contiene exactamente una variable libre, por ejemplo, «x», corresponde exactamente una clase que tiene por elementos a los objetos que satisfacen la función proposicional dada, y solamente a ellos. Obtenemos una designación de dicha clase colocando antes de la función proposicional la siguiente frase, que pertenece a las expresiones fundamentales de la teoría de clases:

(II) *la clase de todos los objetos x tales que.*

Si denotamos la clase en cuestión por medio de un solo símbolo, por ejemplo «**C**», la fórmula:

$$x \in \mathbf{C}$$

será —para todo x— equivalente a la función proposicional original.

Se ve, por lo tanto, que cualquier función proposicional que contenga a «x» como única variable libre puede transformarse en una función equivalente de la forma:

$$x \in K$$

donde en lugar de «K» debe colocarse una constante que designe una clase; en consecuencia, puede considerarse la última fórmula como la forma más general de función proposicional con una variable libre.

Las frases (I) y (II) son reemplazadas a veces por expresiones simbólicas; podemos, por ejemplo, convenir en usar el siguiente símbolo con ese propósito:

$$\underset{x}{\mathbf{C}}.$$

*Consideremos ahora la siguiente expresión:

1 *pertenece al conjunto de todos los números x tales que* $x > 0$,

la cual puede escribirse usando solamente símbolos:

$$1 \in \underset{x}{\mathbf{C}}\,(x > 0).$$

Esta expresión es evidentemente una proposición e incluso una proposición verdadera; ella expresa, en forma más complicada, el mismo pensamiento que esta simple fórmula:

$$1 > 0.$$

En consecuencia, esta expresión no puede contener ninguna variable libre, y la variable «x» que aparece en ella debe ser ligada. Puesto que, por otra parte, no hallamos en la anterior expresión ningún cuantificador, llegamos a la conclusión de que frases tales como (I) y (II) se comportan como cuantificadores, o sea que ligan variables y, por lo tanto, deben ser contadas entre los operadores (cf. Sección 4).

Agregamos que con frecuencia se prefija un operador como (I) y (II) a las funciones proposicionales que además de «x» contienen otras variables libres (esto ocurre en casi todos los casos en que tales operaciones se aplican en geometría). Las expresiones así obtenidas, como por ejemplo:

el conjunto de todos los números x tales que $x > y$,

no designan, sin embargo, ninguna clase definida; ellas son funciones designativas en el sentido que se estableció en la Sección 2, es decir, se transforman en designaciones de clases si reemplazamos las variables libres (pero no «x») por constantes apropiadas. Así, en el último ejemplo, podríamos reemplazar «y» por «0».*

De las funciones proposicionales con una variable libre se afirma a menudo, que expresan una determinada propiedad de objetos, propiedad que afecta a los objetos que la satisfacen y sólo a éstos (por ejemplo, la función proposicional «*x es divisible por 2*» expresa del número x la propiedad de ser divisible por 2, o de ser par). La clase que corresponde a esta función contendrá, pues, como elementos, todos los objetos poseedores de la citada propiedad, y a ningún otro. De esta forma, a toda propiedad de objetos se le podrá hacer corresponder una clase unívocamente determinada. Ahora bien, también es verdadera la recíproca: a toda clase se le puede asignar una propiedad poseída exclusivamente por los elementos de dicha clase; a saber, la propiedad de

pertenecer a ella. Por esto no es necesario, en la opinión de muchos lógicos, distinguir entre los conceptos de clase y propiedad; en otras palabras, una «teoría de propiedades» especial sería innecesaria, siendo suficiente la teoría de clases.

Como aplicación de estas observaciones daremos una nueva formulación de la ley de LEIBNIZ. La formulación original (en la Sección 17) contenía el término «*propiedad*»; en la que sigue, que le es equivalente, usamos en cambio el término «*clase*»:

$x = y$ si, y sólo si, toda clase que contiene como elemento a uno de los objetos x o y, también contiene al otro como elemento.

En esta formulación de la ley de LEIBNIZ se pone de manifiesto que el concepto de identidad puede definirse en términos de la teoría de clases.

23. Clase universal y clase nula

Como ya sabemos, a cualquier función proposicional con una variable libre corresponde la clase de todos los objetos que satisfacen esta función. Esto se puede aplicar ahora a las dos siguientes funciones particulares:

(I) $$x = x, \quad x \neq x.$$

La primera de estas funciones es evidentemente satisfecha por todo individuo (véase Sección 17). Por lo tanto, la clase correspondiente

$$\underset{x}{\mathbf{C}}\,(x = x)$$

contiene a todos los individuos como elementos; llamamos a esta clase la CLASE UNIVERSAL y la denotamos por el símbolo «**V**» (o «**1**»). La segunda función proposicional no es satisfecha por ningún objeto. En consecuencia, la clase que le corresponde

$$\underset{x}{\mathbf{C}}\,(x \neq x),$$

es denominada la CLASE NULA O CLASE VACÍA y denotada por «Λ» (o «0»); no contiene ningún elemento. Podemos reemplazar ahora a las funciones proposicionales (I) por funciones equivalentes de la forma:

$$x \in K,$$

a saber, por:

(II) $$x \in \mathsf{V}, \quad x \in \Lambda,$$

siendo satisfecha la primera por cualquier individuo, y no siéndolo por ninguno la segunda.

En lugar de emplear el concepto lógico general de individuo dentro de una determinada teoría matemática, es a veces más conveniente especificar qué es lo que se considera como objeto individual dentro del marco de esa teoría; se denotará entonces nuevamente por «V» a la clase de todos esos objetos y se la llamará el UNIVERSO DE DISCURSO de la teoría. En la aritmética, por ejemplo, el universo de discurso está constituido por la clase de todos los números.

Se ha de notar que V es la clase de todos los individuos, pero no la clase que contiene como elementos a todos los objetos posibles, a saber, también clases de primer orden, segundo orden y así en adelante. Se presenta el interrogante de saber si una clase tal de todos los objetos posibles existe, y, de una manera más general, si podemos considerar clases «no-homogéneas» que no pertenezcan a un orden particular y que contengan como elementos tanto individuos como clases de diversos órdenes. Esta cuestión está estrechamente relacionada con los más intrincados problemas de la lógica contemporánea, a saber, la así denominada ANTINOMIA DE RUSSELL y la TEORÍA DE LOS TIPOS LÓGICOS[1]. Una discusión de esta cuestión iría más allá de los propósitos de este libro. Solamente diremos aquí que rara vez es necesario considerar clases «no-homogéneas» en matemática (excepto en la teoría general de conjuntos), y mucho menos aún en otras ciencias.

[1] El concepto de tipos lógicos introducido por RUSSELL es parecido al de orden de una clase, y puede ser concebido hasta como una generación de este último; generalización que no solamente se refiere a las clases, sino también a otras cosas; por ejemplo, a relaciones, que serán consideradas en el capítulo siguiente. La teoría de tipos lógicos ha sido desarrollada sistemáticamente en *Principia Mathematica* (cf. nota 1 en la pág. 42).

24. Relaciones fundamentales entre clases

Entre dos clases arbitrarias K y L, pueden existir diversas relaciones. Puede ocurrir, por ejemplo, que todo elemento de la clase K sea al mismo tiempo un elemento de la clase L; decimos entonces que LA CLASE K ES UNA SUBCLASE DE LA CLASE L o está INCLUIDA EN LA CLASE L o que TIENE LA RELACIÓN DE INCLUSIÓN CON LA CLASE L; y decimos que LA CLASE L INCLUYE A LA CLASE K COMO SUBCLASE. Expresaremos esto, brevemente, mediante una de las fórmulas:

$$K \subset L \quad \text{o} \quad L \supset K.$$

Al decir que K es una subclase de L no queremos excluir la posibilidad de que también L sea una subclase de K. En otras palabras, K y L pueden ser subclases una de otra; en tal caso, se sigue de una ley (dada más abajo) de la teoría de clases que K y L son idénticas. Si, por otra parte, todo elemento de la clase K es un elemento de la clase L, pero no todo elemento de la clase L es un elemento de la clase K, entonces decimos que la clase K es una SUBCLASE PROPIA o una PARTE DE LA CLASE L, y decimos que L INCLUYE A K COMO SUBCLASE PROPIA o COMO PARTE. Por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros es un subconjunto propio del conjunto de todos los números racionales; una recta incluye como parte a cada uno de sus segmentos.

Decimos que dos clases K y L se INTERSECAN si ellas tienen al menos un elemento en común y, además, cada una contiene elementos no contenidos en la otra. Si cada una de dos clases tiene al menos un elemento (es decir, si son no vacías), pero si no tienen elementos en común, decimos que son MUTUAMENTE EXCLUYENTES o DISJUNTAS. Un círculo, por ejemplo, interseca a toda recta que pasa por su centro, pero es disjunto de toda recta cuya distancia al centro es mayor que el radio. El conjunto de todos los números positivos interseca al conjunto de todos los números racionales, pero el conjunto de todos los números positivos y el conjunto de todos los números negativos son mutuamente excluyentes.

Demos algunos ejemplos de leyes que conciernen a las relaciones entre clases arriba mencionadas.

Para toda clase K, $K \subset K$.

Si $K \subset L$ *y* $L \subset K$, *entonces* $K = L$.

Si $K \subset L$ *y* $L \subset M$, *entonces* $K \subset M$.

Si K *es una subclase no vacía de* L, *y si las clases* L *y* M *son disjuntas, entonces las clases* K *y* M *son disjuntas.*

El primero de estos enunciados se llama LEY DE REFLEXIVIDAD para la inclusión o LEY DE IDENTIDAD de la teoría de las clases. El tercero se llama LEY DE TRANSITIVIDAD para la inclusión; junto con el cuarto enunciado y con otros de estructura análoga, forma un grupo de enunciados que reciben el nombre de LEYES DEL SILOGISMO CATEGÓRICO.

Una propiedad característica de la clase universal y de la clase nula que está relacionada con el concepto de inclusión, es la que se expresa con la siguiente ley:

Para toda clase K, $\mathbf{V} \supset K$ *y* $\mathbf{\Lambda} \subset K$.

Este enunciado parece a mucha gente bastante paradójico, sobre todo en su segunda parte, que se refiere a la clase nula. Con el objeto de demostrar esta segunda parte, consideremos la implicación:

si $x \in \mathbf{\Lambda}$, *entonces* $x \in K$.

Cualquiera sea el nombre que coloquemos en el lugar de «x» (y «K»), el antecedente de la implicación será una proposición falsa, y, por lo tanto, toda la implicación será una proposición verdadera (como dicen a veces los matemáticos, la implicación se satisface «vacuamente»). Entonces podemos decir que, si un objeto cualquiera es elemento de la clase $\mathbf{\Lambda}$, es también elemento de la clase K, y, por lo tanto, en virtud de la definición de inclusión, tenemos: $\mathbf{\Lambda} \subset K$. La primera parte de la ley se demuestra análogamente.

Es fácil ver que, entre dos clases cualesquiera, debe verificarse alguna de las relaciones consideradas. Esto es expresado por la siguiente ley:

Para clases K y L cualesquiera, o bien $K = L$, o bien K es una subclase propia de L, o bien K incluye a L como subclase propia, o bien K y L se intersecan, o bien finalmente K y L son disjuntas; ningún par de estas relaciones valen simultáneamente.

Para entender clara e intuitivamente esta ley es mejor imaginarse a las clases K y L como figuras geométricas y considerar todas las posibles posiciones en que pueda estar una de estas figuras respecto de la otra.

Las relaciones consideradas en esta sección puede ser llamadas RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE CLASES[1].

Casi toda la lógica tradicional (cf. Sección 6) puede reducirse a la teoría de las relaciones fundamentales entre clases, es decir, a una pequeña parte de la teoría de clases. Aparentemente ambas disciplinas se diferencian por el hecho de que en la antigua lógica no interviene explícitamente el concepto de clase. En lugar de decir, por ejemplo, que la clase de los caballos está contenida en la de los mamíferos, en la lógica antigua solía decirse que la propiedad de ser mamífero es poseída por todos los caballos, o, simplemente, que todo caballo es mamífero. Las leyes más importantes de la lógica tradicional son las del silogismo categórico, que corresponden exactamente a las leyes de la teoría de clases que hemos citado más arriba a las que hemos dado ese nombre. Por ejemplo, en la lógica antigua, la primera de las leyes del silogismo mencionadas anteriormente toma la siguiente forma:

Si todo M es P y todo S es M, entonces todo S es P.

Ésta es la ley más famosa de la lógica tradicional, y se la conoce como la ley del silogismo BÁRBARA.

---

[1] Estas relaciones fueron investigadas por primera vez de una manera exhaustiva por el matemático francés J. D. GERGONNE (1771-1859).

25. Operaciones con clases

Consideraremos ahora ciertas operaciones mediante las cuales, partiendo de clases dadas, se forman nuevas clases.

Dadas dos clases cualesquiera K y L, puede formarse una nueva clase M que contiene como elementos aquellos, y solamente aquellos, objetos que pertenecen al menos a una de las clases K y L; podría decirse que la clase M se obtiene de la clase K agregándole los elementos de la clase L. Esta operación es llamada ADICIÓN DE CLASES, y la clase M recibe el nombre de SUMA o UNIÓN DE LAS CLASES K y L, y se la designa con el símbolo:

$$K \cup L \text{ (o } K + L\text{)}.$$

Otra operación con dos clases K y L, llamada MULTIPLICACIÓN DE CLASES, consiste en formar una nueva clase M cuyos elementos son aquellos, y solamente aquellos, objetos que pertenecen a ambas clases K y L; esta clase M es llamada el PRODUCTO o INTERSECCIÓN DE LAS CLASES K Y L, y es designada por el símbolo:

$$K \cap L \text{ (o } K \cdot L\text{)}.$$

Estas dos operaciones se aplican frecuentemente en geometría; a veces es especialmente cómodo aplicarlas a la definición de nuevas especies de figuras geométricas. Admitido, por ejemplo, que ya supiésemos lo que son ángulos adyacentes, entonces el semiplano o ángulo llano podría definirse como la clase unión de dos ángulos adyacentes (considerando el ángulo como dominio angular, es decir, como una parte del plano limitada por dos semirrectas llamadas lados del ángulo). Considerando a continuación un círculo arbitrario y un ángulo cuyo vértice esté situado en el centro del círculo, la intersección de ambas figuras será una nueva figura llamada sector circular.

Vamos a indicar dos ejemplos más del campo de la aritmética: la suma del conjunto de todos los números positivos y de todos los números negativos, será el conjunto de todos los números distintos de 0; la intersección del conjunto de todos los números pares y del conjunto de todos los números primos será un con-

junto que tendrá un solo elemento, el número 2 (este número es el único número par y primo).

Para la adición y multiplicación de clases, valen diversas leyes. Algunas son completamente análogas a los teoremas de la aritmética relativos a la adición y multiplicación de números (precisamente por esta razón se han elegido los términos «adición» y «multiplicación» para designarlas); como ejemplos mencionaremos las LEYES CONMUTATIVAS y ASOCIATIVAS de la adición y multiplicación de clases:

Para clases cualesquiera K *y* L, $K \cup L = L \cup K$ *y* $K \cap L = L \cap K$.

Para clases K, L *y* M *cualesquiera*, $K \cup (L \cup M) = (K \cup L) \cup M$ *y* $K \cap (L \cap M) = (K \cap L) \cap M$.

La analogía con los teoremas aritméticos correspondientes se vuelve evidente cuando reemplazamos los símbolos «$\cup$» y «$\cap$» por los símbolos usuales «$+$» y «$\cdot$» de adición y multiplicación.

Pero en cambio, otras leyes difieren considerablemente de las leyes de la aritmética; un ejemplo característico es la llamada LEY DE TAUTOLOGÍA:

Para toda clase K, $K \cup K = K$ *y* $K \cap K = K$.

Esta ley se vuelve obvia cuando reflexionamos sobre el significado de los símbolos «$K \cup K$» y «$K \cap K$»; si, por ejemplo, a los elementos de la clase K se le agregan los elementos de esta misma clase, en realidad no se agrega nada y como resultado se obtiene nuevamente la clase K.

Queremos mencionar aún otra operación, que difiere de las operaciones de adición y multiplicación en que no se realiza con dos clases, sino con una sola. Ésta es la operación que consiste en formar, a partir de una clase dada K, el llamado COMPLEMENTO DE LA CLASE K, esto es, la clase de todos los objetos que no pertenecen a la clase K. El complemento de la clase K se denota por:

$$K'.$$

Si K es, por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros, entonces todas las fracciones y todos los números irracionales pertenecerán a K'.

Como ejemplos de leyes que se refieren al concepto de complemento y que establecen sus conexiones con otros conceptos considerados anteriormente, damos los dos enunciados siguientes:

Para toda clase K, $K \cup K' = \mathsf{V}$.

Para toda clase K, $K \cap K' = \Lambda$.

El primero de ellos se llama LEY DEL TERCERO EXCLUIDO de la teoría de clases, y el segundo LEY DE CONTRADICCIÓN de la teoría de clases.

Las relaciones entre clases y las operaciones con éstas que acabamos de tratar, y también los conceptos de clase universal y clase vacía, pertenecen a una parte especial de la teoría de clases; como los teoremas referentes a estas relaciones y operaciones tienen en su mayor parte un carácter de fórmulas simples, y recuerdan teoremas de la aritmética, a esta parte se da el nombre de CÁLCULO DE CLASES.

26. Clases coordinables. Número cardinal de una clase. Clases finitas e infinitas. La aritmética como parte de la lógica

*Entre los restantes conceptos estudiados en la teoría de clases, hay un grupo que merece especial atención y que incluye conceptos tales como los de clases coordinables, número cardinal de una clase, clases finitas e infinitas. Desgraciadamente, éstos son conceptos difíciles que aquí sólo podrán ser tratados de manera superficial.

Como ejemplo de dos CLASES COORDINABLES O EQUIVALENTES, pueden servir los conjuntos de los dedos de las manos derecha e izquierda; ambos son coordinables, pues con los dedos de las dos manos se pueden formar pares en los que: (i) todo dedo figura exactamente en un par, y (ii) todo par contiene un dedo de la

mano derecha y un dedo de la izquierda. En el mismo sentido, son coordinables, por ejemplo, los tres conjuntos siguientes: el conjunto de todos los vértices, el conjunto de todos los ángulos y el conjunto de todos los lados de un polígono arbitrario. Más adelante, en la Sección 33, daremos una definición general y precisa del concepto de clases coordinables.

Consideremos ahora una clase cualquiera K; existe, sin duda, una propiedad poseída por todas las clases coordinables con K y por ninguna otra clase (a saber, la propiedad de ser coordinable con K); esta propiedad es llamada NÚMERO CARDINAL, O NÚMERO DE ELEMENTOS O POTENCIA DE LA CLASE K. Esto puede ser expresado de una manera más breve y precisa, aunque quizá más abstracta: el número cardinal de una clase K es la clase de todas las clases coordinables con K. Se sigue de esto que dos clases K y L tienen el mismo número cardinal, si, y sólo si, son coordinables.

En relación con el número de sus elementos, las clases se clasifican en finitas e infinitas; entre las primeras se distinguen las que constan de ningún, o exactamente uno, dos, tres, etc., elementos. Sobre la base de la aritmética es como se definen estos conceptos con la mayor sencillez. Sea en efecto, n un número natural cualquiera (esto es, entero no negativo); diremos que LA CLASE K CONSTA (O CONSISTE) DE n ELEMENTOS si K es coordinable con la clase de todos los números naturales menores que n. Según ello, una clase constará en particular de 2 elementos, cuando sea coordinable con la clase de todos los números naturales menores que 2, es decir, con la clase compuesta por los números 0 y 1; del mismo modo, una clase constará de 3 elementos cuando sea coordinable con la clase que tiene como elementos los números 0, 1 y 2. En general, llamaremos FINITA a una clase K, si existe un número natural n tal que la clase K consiste de n elementos; en caso contrario diremos que K es INFINITA.

Se ha demostrado, sin embargo, que aún es posible otra manera de proceder: todos los términos últimamente considerados pueden definirse con ayuda de expresiones de carácter puramente lógico sin recurrir a ningún concepto de la aritmética. Podríamos decir, por ejemplo, que la clase K consiste de exactamente un elemento, si ella satisface las condiciones siguientes: (i) existe un x tal que $x \in K$; (ii) para todo y y z, si $y \in K$ y $z \in K$, entonces

$y = z$ (estas dos condiciones pueden ser reemplazadas por una sola: «existe exactamente un x tal que $x \in K$»; cf. Sección 20). Análogamente podemos definir las frases: «la clase K consiste de dos elementos», «la clase K consiste de tres elementos» y así sucesivamente. El problema se hace mucho más difícil al tratar de definir los términos «clase finita» y «clase infinita»; pero también en estos casos los esfuerzos para resolver el problema positivamente han tenido éxito (cf. Sección 33), y, por consiguiente, todos los conceptos considerados quedan incluidos en el dominio de la lógica.

Esta circunstancia lleva consigo una consecuencia de gran interés y de importancia trascendental; se ha demostrado, en efecto, que también el concepto mismo de número y todos los demás del dominio de la aritmética, pueden definirse dentro de la lógica. Es realmente fácil establecer el sentido de los símbolos que denotan a los distintos números naturales, es decir, de los símbolos «0», «1», «2», etc. Se puede decir, por ejemplo, que el número 1 es el número de elementos de una clase que consiste de exactamente un elemento (definición aparentemente incorrecta, pues parece como si en la formulación de ella se cometiera un círculo vicioso, al figurar en el definiens la palabra «un» que precisamente se trata de definir; en realidad, no se comete, sin embargo, ningún error, pues la frase «la clase consiste de exactamente un elemento» es considerada como un todo, y su sentido ha sido definido anteriormente). Tampoco ofrece dificultades el definir el concepto general de número natural: un número natural es el número cardinal de una clase finita. Además, estamos en situación de definir todas las operaciones con números naturales, y ampliar el concepto de número con la introducción de las fracciones, números negativos e irracionales, sin necesidad de ir más allá de los límites de la lógica. Más aún, podríamos fundamentar todos los teoremas de la aritmética apoyándonos exclusivamente en teoremas de la lógica (para este fin sólo tendríamos que ampliar el sistema de leyes lógicas con un enunciado intuitivamente menos evidente que los restantes, llamado AXIOMA DE INFINITUD, que afirma la existencia de una infinidad de objetos distintos). Esta construcción completa sería muy abstracta y no divulgable con facilidad, no acomodándose, por lo tanto, al marco de una exposición elemental de la aritmética; tampoco trataremos en este libro de adaptarnos a

esta concepción y consideraremos a los números como individuos y no como propiedades ni como clases de clases. Pero el mero hecho de haber sido posible desarrollar toda la aritmética, incluyendo las disciplinas erigidas sobre ella —álgebra, análisis, etc.—, como partes de la lógica pura, constituye una de las más grandes realizaciones de las investigaciones lógicas recientes[1].*

Ejercicios

1. Sea K el conjunto de todos los números menores que 3/4; ¿cuáles de las siguientes fórmulas son verdaderas:

$$0 \in K, \quad 1 \in K, \quad 2/3 \in K, \quad 3/4 \in K \quad 4/5 \in K \text{ ?}$$

2. Consideremos los cuatro conjuntos siguientes:

(a) *el conjunto de todos los números positivos*,

(b) *el conjunto de todos los números menores que* 3,

(c) *el conjunto de todos los números x tales que* $x + 5 < 8$,

(d) *el conjunto de todos los números x que satisfacen la función proposicional* «$x < 2x$».

¿Cuáles de estos conjuntos son idénticos y cuáles no lo son?

3. ¿Cómo se llama en la geometría el conjunto de todos los puntos del espacio cuya distancia a un punto dado o a una recta dada respectivamente no es mayor que la longitud de un segmento dado?

4. Sean K y L dos círculos concéntricos, y sea el radio del primero menor que el del segundo, ¿cuáles de las relaciones discutidas en la Sección 24 rigen entre estos dos círculos? ¿Rige la misma relación entre las circunferencias de los círculos?

---

[1] Las ideas fundamentales en este campo se deben a FREGE (cf. nota 2 en la página 42); las desarrolló por primera vez en su interesante obra *Die Grundlagen der Arithmetik* (Breslau, 1884). Las ideas de FREGE han encontrado su realización sistemática y completa en *Principia Mathematica*, de WHITEHEAD y RUSSELL (cf. nota 1 en la pág. 42).

5. Dibújense dos cuadrados K y L de manera que estén en una de las relaciones siguientes:

(a) $K = L$,
(b) *el cuadrado K es una parte propia del cuadrado L,*
(c) *el cuadrado K incluye al L como una parte propia,*
(d) *los cuadrados K y L se intersecan,*
(e) *los cuadrados K y L son disjuntos.*

¿Cuáles de estos casos se eliminan, (i) si los cuadrados son congruentes, y (ii) si en vez de los cuadrados se consideran sus contornos?

6. Sean x e y dos números arbitrarios, y $x < y$. El conjunto de todos los números no menores que x y no mayores que y, se llama, como es sabido, intervalo de extremos x e y; se designa este conjunto con el símbolo «$[x, y]$».

¿Cuáles de las fórmulas indicadas a continuación son válidas:

(a) $[3, 5] \subset [3, 6]$,
(b) $[4, 7] \subset [5, 10]$,
(c) $[-2, 4] \supset [-3, 5]$,
(d) $[-7, 1] \supset [-5, -2]$?

¿Cuáles de las relaciones fundamentales rigen entre los intervalos:

(e) $[2, 4]$ y $[5, 8]$,
(f) $[3, 6]$ y $[3\,^1/_2, 5\,^1/_2]$,
(g) $[1\,^1/_2, 7]$ y $[-2, 3\,^1/_2]$?

7. ¿Es la siguiente proposición (que tiene la misma estructura que las leyes del silogismo dadas en la Sección 24) verdadera:

si K es disjunto de L y L disjunto de M, entonces K es disjunto de M ?

8. Traducir las siguientes fórmulas en términos del lenguajo ordinario:

(a) $x = y \leftrightarrow \underset{K}{\mathsf{A}} [x \in K \leftrightarrow y \in K]$,

(b) $K = L \leftrightarrow \underset{x}{\mathsf{A}} [x \in K \leftrightarrow x \in L]$.

¿Cuáles de las leyes mencionadas en las Secciones 22 y 24 son expresadas por estas fórmulas? ¿Qué modificaciones es necesario efectuar en ambos miembros de la equivalencia (b) para obtener una definición del símbolo «$\subset$» o «$\supset$»?

9. Sea ABC un triángulo arbitrario y D un punto cualquiera situado sobre el segmento BC, ¿qué figuras son formadas por la suma de los dos triángulos ABD y ACD y cuáles por su producto? Expresar la respuesta con fórmulas.

10. Representar un cuadrado cualquiera:

(a) como suma de dos trapezoides,
(b) como intersección de dos triángulos.

11. ¿Cuáles de las fórmulas dadas a continuación son verdaderas (comparar con el Ejercicio 6):

(a) $[2, 3\,^1/_2] \cup [3, 5] = [2, 5]$,
(b) $[-1, 2] \cup [0, 3] = [0, 2]$,
(c) $[-2, 8] \cap [3, 7] = [-2, 8]$,
(d) $[2, 4\,^1/_2] \cap [3, 5] = [2, 3]$?

En aquellas fórmulas que son falsas, corregir la expresión que aparece a la derecha del símbolo «=».

12. Sean K y L dos clases cualesquiera. ¿Qué clases son $K \cup L$ y $K \cap L$ en caso que $K \subset L$? En particular, ¿qué clases son $K \cup \mathsf{V}$, $K \cap \mathsf{V}$, $\Lambda \cup L$ y $\Lambda \cap L$?

Indicación: Al contestar la segunda pregunta téngase presente una ley de la Sección 24 relativa a las clases V y Λ.

13. Demuéstrese que para clases K, L y M cualesquiera se satisfacen las siguientes fórmulas:

(a) $K \subset K \cup L$ y $K \supset K \cap L$,

(b) $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$ y $K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M)$,

(c) $(K')' = K$,

(d) $(K \cup L)' = K' \cap L'$ y $(K \cap L)' = K' \cup L'$.

Las fórmulas (a) se llaman LEYES DE SIMPLIFICACIÓN (para la adición y multiplicación de clases); las fórmulas (b) son las LEYES DISTRIBUTIVAS (para la multiplicación de clases con respecto a la adición y para la adición con respecto a la multiplicación); la fórmula (c) es la LEY DEL COMPLEMENTO DOBLE; finalmente, las fórmulas (d) son las LEYES DE DE MORGAN para la teoría de clases[1]. ¿Cuáles de estas leyes corresponden a teoremas de la aritmética?

Indicación: Para probar la primera de las fórmulas (d), por ejemplo, basta probar que las clases $(K \cup L)'$ y $K' \cap L'$ constan de los mismos elementos (cf. Sección 24). Para esto, aclárese, usando las definiciones de la Sección 25, cuándo un objeto x pertenece a la clase $(K \cup L)'$ y cuándo pertenece a la clase $K' \cap L'$.

*14. Existe una importante semejanza estructural (indicada por la analogía de sus nombres) entre las leyes del cálculo proposicional enunciadas en las Secciones 12 y 13 y en el Ejercicio 14 del Capítulo II, por un lado, y las leyes del cálculo de clases dadas en las Secciones 24 y 25 y en el ejercicio precedente, por el otro. Descríbase en detalle en qué se basa esta semejanza, y trátese de encontrar una explicación general de este fenómeno.

En la Sección 14 hemos tratado la ley de contraposición del cálculo proposicional; formular la ley análoga para el cálculo de clases.

15. Con ayuda del símbolo:

$$\underset{\neq}{\subset}$$

[1] Cf. nota 1 en la página 77.

introducido en la Sección 22, podemos escribir la definición de suma de dos clases del siguiente modo:

$$K \cup L = \underset{x}{\mathsf{C}}\,[x \in K \vee x \in L];$$

pero también es posible dar a esta definición su forma usual de equivalencia (sin usar aquel símbolo):

$$[x \in (K \cup L)] \leftrightarrow [x \in K \vee x \in L].$$

Formúlense análogamente de ambas maneras, las definiciones de: clase universal, clase nula, producto de dos clases y complemento de una clase.

16. La diferencia de dos clases dadas, K y L, en símbolos, $K - L$, es la clase M definida por:

$$M = \underset{x}{\mathsf{C}}\,[x \in K \wedge \sim (x \in L)].$$

Si K es la clase de todos los números enteros y L la clase de todos los enteros negativos, ¿qué clases son $K - L$ y $L - K$? ¿Cuáles de las siguientes igualdades son satisfechas por todas las clases:

$$(K - L) \cup L = K \cup L, \quad K - (K - L) = L$$
$$\text{y} \quad L - (K - L) = L\ ?$$

*17. ¿Existe algún polígono en el que el conjunto de todos sus lados sea coordinable con el de todas sus diagonales?

*18. Juan trabaja los lunes, miércoles y viernes, mientras que Pedro trabaja los lunes, martes, miércoles y jueves. Sea K el conjunto de los días de la semana en que Juan trabaja, y L el conjunto de los días en que Pedro trabaja. ¿Qué porcentaje del número de elementos de $K \cup L$ es el número de elementos de $K \cap L$? Contéstese la misma pregunta reemplazando $K \cap L$ por $K - L$ (cf. Ejercicio 16).

*19. Para cada una de las dos expresiones siguientes escríbase una fórmula equivalente usando únicamente símbolos lógicos:

(a) *la clase K consta de dos elementos,*

(b) *la clase K consta de tres elementos.*

*20. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son finitos y cuáles infinitos:

(a) el conjunto de todos los números naturales x tales que $0 < x$ y $x < 4$,

(b) el conjunto de todos los números racionales x tales que $0 < x$ y $x < 4$,

(c) el conjunto de todos los números irracionales x tales que $0 < x$ y $x < 4$?

21. Establézcase, para cada una de las expresiones siguientes, si se trata de una proposición, una función proposicional, una designación o una función designativa, y especifíquese qué variables se presentan libres y cuáles ligadas:

(a) $\underset{x}{\mathsf{C}}\,[x^2 = 9 \wedge 0 < x]$,

(b) $\underset{K,L}{\mathsf{A}}\,[K \subset L' \to \underset{z}{\mathsf{E}}\,[z \in K \wedge \sim (z \in L)]]$,

(c) $K \cap \underset{y}{\mathsf{C}}\,[y \in L \wedge \sim (y \in K)]$,

(d) $9 \in \underset{x}{\mathsf{C}}\,[\underset{y}{\mathsf{E}}\,(x = y^2)]$.

V

SOBRE LA TEORÍA DE RELACIONES

27. Relaciónes, sus dominios y contradominios; relaciones y funciones proposicionales con dos variables libres

En los capítulos anteriores hemos ya encontrado algunas RELACIONES entre objétos. Como ejemplos de relaciones entre dos objetos podemos tomar identidad (igualdad) y diversidad (desigualdad). A veces leemos la fórmula:

$$x = y$$

como sigue:

x tiene la relación de identidad con y

o también:

la relación de identidad rige entre x e y,

y decimos que el símbolo «=» designa la relación de identidad. De manera análoga, la fórmula:

$$x \neq y$$

se lee a veces:

x tiene la relación de diversidad con y

o:

la relación de diversidad rige entre x e y,

y se dice que el símbolo «$\neq$» designa la relación de diversidad. Hemos encontrado también ciertas relaciones que rigen entre clases, a saber, las relaciones de inclusión, de intersecarse, de ser disjuntas, etc. Discutiremos ahora algunos conceptos pertenecientes a la TEORÍA general DE RELACIONES, que constituye una parte especial y muy importante de la lógica, en la cual se consideran relaciones de carácter enteramente arbitrario y se establecen leyes generales sobre ellas[1].

Para facilitar nuestras consideraciones, introduciremos variables especiales «R», «S», ..., que se usan para denotar relaciones. En lugar de expresiones como:

el objeto x tiene la relación R con el objeto y,

y:

el objeto x no tiene la relación R con el objeto y,

nos serviremos de las abreviaturas simbólicas:

$$x \, R \, y$$

y (usando el símbolo de negación del cálculo proposicional, cf. Sección 13)

$$\sim (x \, R \, y),$$

respectivamente.

Todo objeto que tenga la relación R con algún objeto y podemos llamarlo un PREDECESOR CON RESPECTO A LA RELACIÓN R; todo objeto y para el cual exista un objeto x tal que

$$x \, R \, y,$$

es llamado un SUCESOR CON RESPECTO A LA RELACIÓN R. La clase de todos los predecesores con respecto a la relación R es llamada

---

[1] De MORGAN y PEIRCE (cf. notas 1 en la pág. 77 y 1 en la pág. 37) fueron los primeros en desarrollar la teoría de relaciones, especialmente aquella parte conocida como cálculo de relaciones (cf. Sección 28). Su obra fue sistemáticamente ampliada y completada por el lógico alemán E. SCHRÖDER (1841-1902). La obra de SCHRÖDER, *Algebra und Logik der Relative* (Leipzig, 1895), que fue publicada como tercer volumen de su extenso tratado *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, es aún la única presentación exhaustiva del cálculo de relaciones.

el DOMINIO y la clase de todos los sucesores el CONTRADOMINIO (o DOMINIO RECÍPROCO) DE LA RELACIÓN R. Así, por ejemplo, todo individuo es un predecesor y un sucesor con respecto a la relación de identidad, de modo que tanto el dominio como el contradominio de esta relación es la clase universal.

En la teoría de relaciones —lo mismo que en la teoría de clases— podemos distinguir relaciones de diversos órdenes. Las RELACIONES DE PRIMER ORDEN son aquellas que rigen entre individuos; las RELACIONES DE SEGUNDO ORDEN son aquellas que rigen entre clases, o relaciones, de primer orden; y así sucesivamente. La situación es aquí más complicada, ya que debemos considerar frecuentemente relaciones «mixtas» cuyos predecesores son, digamos, individuos, y sus sucesores, clases; o cuyos predecesores son, por ejemplo, clases de primer orden, y sus sucesores, clases de segundo orden. El ejemplo más importante de una relación de este tipo es la relación que rige entre un elemento y una clase a la cual éste pertenece; como se recordará de la Sección 21, esta relación es denotada por el símbolo «$\in$». Como en el caso de clases, nuestras consideraciones se referirán principalmente a relaciones de primer orden, aunque los conceptos discutidos aquí pueden, y, en algunos casos, serán, aplicados a relaciones de órdenes superiores.

Asumiremos que a cada función proposicional con dos variables libres «x» e «y», corresponde una relación que rige entre los objetos x e y si, y sólo si, ellos satisfacen la función proposicional dada; de acuerdo con esto, se dice que una función proposicional con las variables libres «x» e «y» expresa una relación entre los objetos x e y. Por ejemplo, la función proposicional:

$$x + y = 0$$

expresa la relación de tener el signo opuesto o, brevemente, de ser opuestos; los números x e y están en la relación de ser opuestos si, y sólo si, $x + y = 0$. Si denotamos esta relación por el símbolo «$\mathbf{O}$», entonces las fórmulas:

$$x \mathbf{O} y$$

y:

$$x + y = 0$$

son equivalentes. Del mismo modo, toda función proposicional que contenga los símbolos «x» e «y» como únicas variables libres, se podrá transformar en otra fórmula equivalente de la forma:

$$x\,R\,y,$$

en donde en el lugar de «R» aparecerá una constante que designe una relación. La fórmula:

$$x\,R\,y$$

puede considerarse, pues, como la forma general de una función proposicional con dos variables libres, de la misma manera que considerábamos la fórmula:

$$x \in K$$

como expresión general de la función proposicional con una variable libre (cf. Sección 22).

28. Cálculo de relaciones

La teoría de relaciones es una de las ramas más desarrolladas de la lógica matemática. Una parte de ella, el CÁLCULO DE RELACIONES, es análoga al cálculo de clases, siendo su fin principal el establecimiento de leyes formales que rigen las operaciones por medio de las cuales se construyen relaciones a partir de otras dadas.

En el cálculo de relaciones consideramos en primer lugar un grupo de conceptos que son analogías exactas de los empleados en el cálculo de clases; se los denota generalmente por los mismos símbolos y se rigen por leyes bastante similares. (Naturalmente podríamos emplear un conjunto de símbolos distinto en el cálculo de relaciones, a fin de evitar ambigüedades, tomando por ejemplo los símbolos del cálculo de clases y poniéndole un punto a cada uno.)

Tenemos así en el cálculo de relaciones dos relaciones especiales, la RELACIÓN UNIVERSAL V y la RELACIÓN NULA Λ, rigiendo la primera entre todo par de individuos, y la segunda entre ninguno.

Tenemos además diversas relaciones entre relaciones, por ejemplo, la RELACIÓN DE INCLUSIÓN; decimos que la relación R está INCLUIDA en la relación S, en símbolos:

$$R \subset S,$$

si, siempre que R rige entre dos objetos, S también rige entre ellos; o, expresado en otros términos, si para x e y cualesquiera, la fórmula:

$$x\,R\,y$$

implica:

$$x\,S\,y.$$

Sabemos, por ejemplo, en base a la aritmética, que siempre que

$$x < y,$$

entonces

$$x \neq y;$$

por lo tanto, la relación de ser menor está incluida en la relación de diversidad.

Si $$R \subset S \text{ y } S \subset R,$$

simultáneamente, es decir, si las relaciones R y S rigen entre los mismos objetos, entonces son idénticas:

$$R = S.$$

Tenemos además la SUMA O UNIÓN DE DOS RELACIONES R Y S, simbólicamente:

$$R \cup S,$$

y el PRODUCTO O INTERSECCIÓN DE R Y S, simbólicamente:

$$R \cap S.$$

La primera relación, $R \cup S$, rige entre dos objetos, si, y sólo si, al menos una de las relaciones R y S rige entre ellos; en otros términos, la fórmula:

$$x\,(R \cup S)\,y$$

es equivalente a la condición:

$$x\,R\,y \quad o \quad x\,S\,y.$$

De manera similar se define el producto de dos relaciones, empleándose solamente la palabra «y» en lugar de «o». Así, por ejemplo, si R es la relación de paternidad (es decir, una relación que rige entre dos personas x e y si, y sólo si, x es el padre de y), y S es la relación de maternidad, entonces $R \cup S$ es la relación de progenitura, mientras que $R \cap S$ es en este caso la relación nula.

Tenemos finalmente la NEGACIÓN o el COMPLEMENTO DE UNA RELACIÓN R denotado por:

$$R'.$$

Es una relación que rige entre dos objetos si, y sólo si, la relación R no rige entre ellos; en otros términos, para x e y cualesquiera, las fórmulas:

$$x\,R'\,y \quad \text{y} \quad \sim (x\,R\,y)$$

son equivalentes. Se ha de notar que si una relación está representada por una constante, entonces su complemento es frecuentemente denotado por el símbolo que se obtiene tachando a la constante con una barra vertical u oblicua. Por ejemplo, la negación de la relación $<$ es generalmente denotada por «$\nless$», y no por «$<'$».

Hay también en el cálculo de relaciones conceptos enteramente nuevos, sin análogos en el cálculo de clases.

En primer lugar tenemos dos relaciones especiales, la IDENTIDAD y la DIVERSIDAD entre individuos (con las que ya estamos familiarizados por consideraciones anteriores). En el cálculo de relaciones se las denota por medio de símbolos especiales, a saber, «I» y «D», y no por los símbolos «$=$» y «$\neq$» empleados en otras partes de la lógica. Escribimos así:

$$x \,|\, y \quad \text{y} \quad x \,\mathrm{D}\, y$$

en lugar de:

$$x = y \quad \text{y} \quad x \neq y.$$

Los símbolos «=» y «≠» se emplean en el cálculo de relaciones únicamente para denotar la identidad y diversidad entre relaciones.

Tenemos aquí además una operación nueva muy interesante e importante, con cuyo empleo formamos en base a dos relaciones R y S una tercera relación llamada el PRODUCTO RELATIVO o COMPOSICIÓN DE R Y S (en contraposición al mismo, el producto ordinario es a veces llamado PRODUCTO ABSOLUTO). El producto relativo de R y S es denotado por el símbolo:

$$R/S;$$

rige entre dos objetos x e y si, y sólo si, existe un objeto z tal que tenemos al mismo tiempo:

$$x\,R\,z \quad \text{y} \quad z\,S\,y.$$

Así, por ejemplo, si R es la relación de ser esposo, y S la relación de ser hija, entonces R/S rige entre dos personas x e y si hay una persona z tal que x es esposo de z y z es hija de y; por lo tanto, la relación R/S coincide con la relación de ser yerno. Tenemos aquí además otra operación de un carácter similar, cuyo resultado se llama la SUMA RELATIVA DE DOS RELACIONES. Esta operación no desempeña un papel muy importante y no será definida aquí.

Tenemos finalmente una operación similar a la de formación de R', a saber, una operación que permite formar a partir de una relación R una nueva relación denominada CONVERSA DE R, que es denotada por:

$$\breve{R}.$$

La relación $\breve{R}$ rige entre x e y si, y sólo si, R rige entre y y x. Cuando una relación está representada por una constante, em-

pleamos a menudo para denotar a su conversa el mismo símbolo impreso en sentido opuesto. Por ejemplo, la conversa de la relación $<$ es la relación $>$, puesto que para x e y cualesquiera, son equivalentes las fórmulas:

$$x < y \quad \text{e} \quad y > x.$$

En vista del carácter más bien especializado del cálculo de relaciones, no nos internaremos más aquí en los detalles del mismo.

29. Algunas propiedades de relaciones

Trataremos ahora aquella parte de la teoría de relaciones cuya tarea consiste en poner de manifiesto e investigar tipos especiales de relaciones que aparecen frecuentemente en otras ciencias y, en particular, en la matemática.

Llamaremos a una relación R REFLEXIVA EN LA CLASE K, si todo elemento x de la clase K tiene la relación R consigo mismo:

$$x\,R\,x;$$

por el contrario, si ningún elemento de esta clase tiene la relación R consigo mismo:

$$\sim (x\,R\,x),$$

entonces la relación R se dice IRREFLEXIVA EN LA CLASE K. La relación R es llamada SIMÉTRICA EN LA CLASE K si, para todo par de elementos x e y de la clase K, la fórmula:

$$x\,R\,y$$

implica siempre la fórmula:

$$y\,R\,x.$$

En cambio, si la fórmula:

$$x\,R\,y$$

implica siempre:

$$\sim (y\,R\,x),$$

entonces la relación R se dice ASIMÉTRICA EN LA CLASE K. La relación R es llamada TRANSITIVA EN LA CLASE K si, para tres elementos cualesquiera x, y, z de la clase K, las condiciones:

$$x\,R\,y \quad \text{e} \quad y\,R\,z$$

siempre implican:

$$x\,R\,z.$$

Finalmente, si para dos elementos diferentes cualesquiera x e y de la clase K, vale por lo menos una de las fórmulas:

$$x\,R\,y \quad \text{e} \quad y\,R\,x,$$

es decir, si la relación R rige entre dos elementos distintos arbitrarios de K en al menos una dirección, entonces la relación se llama CONEXA EN LA CLASE K.

En caso que K sea la clase universal (o, en todo caso, el universo de discurso de la ciencia en que estamos interesados, cf. Sección 23) es usual decir brevemente: relación reflexiva, simétrica, etcétera, en lugar de: relación reflexiva, simétrica, etc., en la clase K.

30. Relaciones simultáneamente reflexivas, simétricas y transitivas

Estas propiedades de las relaciones se presentan a menudo agrupadas. Son muy comunes, por ejemplo, aquellas relaciones que al mismo tiempo son reflexivas, simétricas y transitivas. Un ejemplo típico de éstas es la relación de identidad; la ley II de la Sección 17 expresa que esta relación es reflexiva, por la ley III la identidad es una relación simétrica, y, según la ley IV, es transitiva (esto justifica los nombres dados a estas leyes en la Sección 17). Muchos otros ejemplos de relaciones de este tipo pueden encontrarse en el dominio de la geometría. La relación de con-

gruencia en el conjunto de todos los segmentos (o de configuraciones geométricas arbitrarias) es reflexiva, puesto que todo segmento es congruente consigo mismo; simétrica, pues de ser un segmento congruente con otro, se sigue que también el segundo lo es con el primero; y transitiva, pues, si el segmento A es congruente con el B, y el B congruente con el segmento C, entonces el segmento A es también congruente con el segmento C. Las mismas tres propiedades son poseídas, por ejemplo, por la relación de semejanza entre polígonos, la de paralelismo entre rectas (asumiendo que toda recta es paralela a sí misma) y —fuera del dominio de la geometría— por las relaciones de ser de la misma edad entre personas, o de sinonimia entre palabras.

Toda relación que sea al mismo tiempo reflexiva, simétrica y transitiva puede tomarse como una especie de igualdad; en lugar de decir que una tal relación rige entre dos objetos, podemos decir, en este sentido, que estos dos objetos son iguales en este o en aquel aspecto, o —de una forma más precisa— que ciertas propiedades de dichos objetos son idénticas. En vez de decir, por ejemplo, que dos segmentos son congruentes, dos personas de la misma edad o dos palabras sinónimas, podemos afirmar que dos segmentos son iguales respecto de su longitud, que la edad de ambas personas es la misma o que los significados de las dos palabras son idénticos.

*A modo de ejemplo indicaremos cómo se puede establecer una base lógica para tales formas de expresión. Para tal fin, estudiemos la relación de semejanza entre polígonos: llamaremos forma del polígono P al conjunto de todos los polígonos semejantes a P (o, usando una terminología más corriente: la propiedad común poseída por todos los polígonos semejantes a P y por ningún otro). Así, formas son ciertos conjuntos de polígonos (o propiedades de polígonos; ver las observaciones al final de la Sección 22). Haciendo uso del hecho mencionado anteriormente que la relación de semejanza es reflexiva, simétrica y transitiva, podemos ahora mostrar fácilmente que todo polígono pertenece a uno y sólo un conjunto tal; que dos polígonos semejantes pertenecen siempre al mismo conjunto; y que dos polígonos que no son semejantes pertenecen a conjuntos diferentes. De esto se sigue de inmediato que las dos aserciones:

los polígonos P y Q son semejantes

y

los polígonos P y Q tienen la misma forma (es decir,
las formas P y Q son idénticas)

son equivalentes.

El lector advertirá inmediatamente que, en el curso de consideraciones precedentes, ya hemos empleado una manera de proceder análoga, a saber, en la Sección 26, al pasar de la expresión:

las clases K y L son coordinables

a la expresión equivalente:

las clases K y L tienen el mismo número cardinal.

No es difícil demostrar que este procedimiento es aplicable a toda relación reflexiva, simétrica y transitiva. Existe incluso una ley lógica, llamada PRINCIPIO DE ABSTRACCIÓN, que proporciona el fundamento teórico general para el procedimiento de que hemos tratado; sin embargo, renunciamos aquí a la formulación exacta de este principio.*

No hay ningún término universalmente aceptado para designar la totalidad de las relaciones simultáneamente reflexivas, simétricas y transitivas. A veces se las llama en general IGUALDADES O EQUIVALENCIAS. Pero el término «igualdad» se reserva a veces para relaciones particulares de la categoría en consideración, y dos objetos son llamados iguales si una tal relación rige entre ellos. Así, por ejemplo, como dijimos en la Sección 19, es frecuente hablar en la geometría de segmentos iguales, en lugar de segmentos congruentes. Debemos insistir una vez más en que sería preferible evitar esta clase de expresiones. Su uso lleva a ambigüedades e infringe la convención según la cual las expresiones «igualdad» e «identidad» son sinónimas.

31. Relaciones de orden. Otros ejemplos de relaciones

Otro tipo muy común de relaciones lo constituyen aquellas que son asimétricas, transitivas y conexas en una clase dada K (puede mostrarse que tales relaciones deben ser también irreflexivas en la clase K). Decimos que una relación con estas propiedades ORDENA LA CLASE K; o también, que la clase K es ORDENADA POR LA RELACIÓN R. Consideremos, por ejemplo, la relación de ser menor (o, como diremos ocasionalmente, la relación *menor que*); ella es asimétrica en cualquier conjunto de números, ya que si x e y son dos números cualesquiera y si

$$x < y,$$

entonces

$$y \not< x, \quad \text{es decir} \quad \sim (y < x);$$

es transitiva, pues las fórmulas:

$$x < y \quad \text{e} \quad y < z$$

siempre implican:

$$x < z;$$

finalmente, es conexa, pues de dos números distintos, uno de ellos debe ser menor que el otro (también es irreflexiva, ya que ningún número es menor que sí mismo). Todo conjunto de números es, por lo tanto, ordenado por la relación de ser menor. Asimismo, la relación de ser mayor representa otra relación de orden para cualquier conjunto de números.

Estudiemos ahora la relación de ser de más edad. Con facilidad comprobamos que ésta es irreflexiva, asimétrica y transitiva en cualquier conjunto de personas. Sin embargo, no es necesariamente conexa: puede ocurrir muy bien que a un mismo conjunto dado pertenezcan dos personas que sean precisamente de la misma edad; esto es, que hayan nacido en el mismo instante, no rigiendo entre ellas, por consiguiente, la relación de ser de más edad en ningún sentido. Si, por otra parte, en el conjunto considerado no

hubiese tales personas, entonces dicho conjunto es ordenado por la relación ser de más edad.

Se conocen numerosos casos de relaciones no pertenecientes a ninguna de las dos categorías estudiadas hasta ahora. Consideremos algunos ejemplos.

La relación de desigualdad es irreflexiva en cualquier conjunto de objetos, puesto que ningún objeto es distinto de sí mismo; es simétrica, pues, si

$$x \neq y,$$

también será

$$y \neq x;$$

sin embargo, no es transitiva, ya que las fórmulas:

$$x \neq y \quad \text{e} \quad y \neq z$$

no implican la fórmula:

$$x \neq z;$$

pero, como fácilmente se comprueba, ella es conexa.

La relación de inclusión entre clases es, en virtud de la ley de identidad y una de las leyes del silogismo (cf. Sección 24), reflexiva y transitiva; ella no es simétrica ni tampoco asimétrica, ya que la fórmula:

$$K \subset L$$

no implica ni excluye la fórmula:

$$L \subset K$$

(estas dos fórmulas se satisfacen simultáneamente, si, y sólo si, las clases K y L son idénticas); por último, puede verse fácilmente que ella no es conexa. De este modo, la relación de inclusión se distingue por sus propiedades de otras relaciones consideradas hasta ahora.

32. Relaciones unívocas o funciones

Trataremos ahora con algún detalle una categoría sumamente importante de relaciones. Diremos que una relación R es una RELACIÓN UNÍVOCA O FUNCIONAL o simplemente una FUNCIÓN cuando a todo objeto y le corresponde, a lo sumo, un objeto x tal que $x\,R\,y$; en otras palabras, si las fórmulas:

$$x\,R\,y \quad \text{y} \quad z\,R\,y$$

implican siempre la fórmula:

$$x = z.$$

Los sucesores con respecto a la relación R, esto es, aquellos objetos y para los cuales existen objetos x tales que

$$x\,R\,y,$$

son los VALORES DEL ARGUMENTO, y los predecesores son los VALORES DE LA FUNCIÓN R. Sea R una función arbitraria, e y uno cualquiera de sus valores del argumento; indicaremos el único valor x de la función correspondiente al valor y del argumento con el símbolo «$R(y)$»; consiguientemente, reemplazamos la fórmula:

$$x\,R\,y$$

por:

$$x = R(y).$$

Para denotar relaciones funcionales, se acostumbra a usar, especialmente en matemática, letras como «f», «g», ..., en vez de las variables «R», «S», ... Así, encontramos fórmulas como las siguientes:

$$x = f(y), \quad x = g(y), \ldots;$$

la fórmula:

$$x = f(y),$$

por ejemplo, se lee de la siguiente manera:

la función f asigna (o *hace corresponder*) *el valor x al valor y del argumento*

o bien

x es aquel valor de la función f que corresponde al valor y del argumento.

(Se acostumbra también usar la variable «x» para denotar el valor del argumento y la variable «y» para denotar el valor de la función. No nos adheriremos a esta costumbre, y seguiremos usando «x» e «y» en el orden opuesto, ya que esto es más conveniente en conexión con la notación general usada en la teoría de relaciones.)

En muchos textos elementales de álgebra se encuentra una definición del concepto de función que es bastante diferente de la definición que hemos adoptado. La relación funcional es caracterizada en ellos como una relación entre dos magnitudes o números «variables»: la «variable independiente» y la «variable dependiente», que dependen una de la otra de manera tal que una variación de la primera da lugar a una variación de la segunda. En la actualidad ya no deberían emplearse definiciones de este tipo, pues ellas no pueden resistir ninguna crítica lógica; son restos de un período en que se trató de distinguir entre magnitudes «constantes» y «variables» (cf. Sección 1). Aquellas personas que quieran dar satisfacción a las exigencias de la ciencia actual, sin romper por completo con la tradición, pueden conservar la terminología antigua y emplear, junto con los términos «valor del argumento» y «valor de la función», las expresiones «valor de la variable independiente» y «valor de la variable dependiente».

El ejemplo más simple de una relación funcional está dado por la relación de identidad. Como ejemplo de una función tomada de la vida cotidiana, consideremos la relación expresada por la función proposicional:

x es padre de y.

Ésta es una relación funcional, ya que para toda persona *y*, existe únicamente una persona *x* que es padre de *y*. Para indicar el

carácter funcional de esta relación, insertamos la palabra «el» en la formulación anterior:

x es el padre de y,

en lugar de la cual podemos escribir también:

x es idéntico al padre de y.

Una tal alteración de la expresión original, insertando el artículo definido, tiene, en lenguaje ordinario, exactamente el mismo propósito que la transición de la fórmula:

$$x \, R \, y$$

a la fórmula:

$$x = R(y)$$

en nuestro simbolismo.

El concepto de función desempeña un papel muy importante en las ciencias matemáticas. Hay ramas enteras de la matemática superior dedicadas exclusivamente al estudio de ciertos tipos de relaciones funcionales. Pero también en matemática elemental, especialmente en álgebra y trigonometría, encontramos gran número de relaciones funcionales. Por ejemplo, las relaciones expresadas por fórmulas tales como:

$$x + y = 5,$$

$$x = y^2,$$

$$x = \log_{10} y,$$

$$x = \text{sen } y.$$

Vamos a estudiar con más atención la segunda de estas fórmulas. A todo número y corresponde un solo número x tal que $x = y^2$, de modo que la fórmula expresa efectivamente una relación funcional. Los valores del argumento de esta función son números arbitrarios y los valores de la función, en cambio, solamente números no negativos. Si designamos esta función con el símbolo «f», la fórmula:

$$x = y^2$$

toma la forma:

$$x = f(y).$$

Evidentemente, «x» e «y» podrán reemplazarse en ella por símbolos que designan números determinados. Ya que, por ejemplo,

$$4 = (-2)^2,$$

podremos afirmar que

$$4 = f(-2);$$

4 es, por consiguiente, el valor de la función f que corresponde al valor del argumento -2.

Por otra parte, también en el dominio de la matemática elemental encontramos numerosas relaciones que no son funciones. Por ejemplo, la relación de ser menor es ciertamente no funcional, puesto que para todo número y existen una infinidad de números x tales que

$$x < y.$$

Tampoco es funcional la relación entre números x e y expresada por la fórmula:

$$x^2 + y^2 = 25,$$

ya que, a un mismo número y pueden corresponder dos números x distintos para los que la fórmula es válida; por ejemplo, al número 4 le corresponden los números 3 y -3. Puede hacerse notar que las relaciones entre números, como la recién considerada, que son expresadas por ecuaciones y que hacen corresponder a cada número y dos o más números x, son a veces llamadas en matemática funciones multívocas o multiformes (en oposición a funciones unívocas, esto es, a funciones en el sentido ordinario). Parece inconveniente, sin embargo —por lo menos en un nivel elemental—, llamar funciones a tales relaciones, ya que esto tiende únicamente a oscurecer la distinción esencial entre la noción de función y la noción más general de relación.

En la aplicación de la matemática a las ciencias empíricas, sobre todo, las funciones desempeñan un papel especialmente importante.

Al estudiar la dependencia entre dos tipos de magnitudes tomadas del mundo exterior, procuramos de ordinario darle a dicha dependencia la forma de una fórmula matemática que nos permita determinar exactamente una de las magnitudes por medio de la otra; tal fórmula representa siempre una relación funcional entre ambos tipos de magnitudes. Recordemos como ejemplo la conocida fórmula de la física:

$$s = 490{,}5t^2$$

que establece la dependencia de la distancia s, recorrida por un cuerpo cayendo libremente, del tiempo t empleado en recorrerla (siendo la distancia media en centímetros y el tiempo en segundos).

*Para concluir nuestras observaciones sobre relaciones funcionales, queremos recalcar que el concepto de función que estamos considerando ahora difiere esencialmente de los conceptos de función proposicional y de función designativa tratados en la Sección 2. Estrictamente hablando, los términos «función proposicional» y «función designativa» no pertenecen al dominio de la lógica o de la matemática; ellos denotan ciertas categorías de expresiones que sirven para formar enunciados lógicos y matemáticos, pero no denotan objetos tratados en ellos (cf. Sección 9). Por otra parte, el término «función» en su nuevo sentido es una expresión de carácter puramente lógico que designa un cierto tipo de objeto tratado en la lógica y la matemática. Sin duda, hay una conexión entre estos conceptos que, aproximadamente, puede describirse como sigue. Si la variable «x» es unida por el símbolo «$=$» a una función designativa que contiene a «y» como única variable, por ejemplo, a «$y^2 + 2y + 3$», entonces la fórmula resultante (que es una función proposicional):

$$x = y^2 + 2y + 3$$

expresa una relación funcional; o, en otras palabras, la relación que rige entre aquellos, y solamente aquellos, números x e y que satisfacen esta fórmula, es una función en el nuevo sentido. Esta es una de las razones por las cuales estos conceptos son tan a menudo confundidos.*

33. Relaciones uno-uno o funciones biunívocas, y correspondencias biunívocas

Entre las relaciones funcionales merecen atención especial las llamadas RELACIONES UNO-UNO O FUNCIONES BIUNÍVOCAS, esto es, relaciones funcionales en que no solamente a todo valor del argumento y corresponde un solo valor de la función x, sino también, recíprocamente, a todo valor x de la función corresponde un solo valor y del argumento; ellas pueden ser definidas también como aquellas relaciones con la propiedad de que tanto ellas como sus recíprocas (cf. Sección 28) son unívocas.

Si f es una función biunívoca, K una clase arbitraria de sus valores del argumento, y L la clase de los valores de la función correspondientes a los elementos de K, decimos que la función f APLICA BIUNÍVOCAMENTE LA CLASE K SOBRE LA CLASE L, o que ESTABLECE UNA CORRESPONDENCIA BIUNÍVOCA ENTRE LOS ELEMENTOS DE K Y L.

Añadiremos a continuación algunos ejemplos. Consideremos una semirrecta cualquiera; designemos por «O» su punto de origen y elijamos un cierto segmento como segmento unidad. Sea además Y un punto arbitrario situado sobre la semirrecta. Como es sabido, el segmento OY puede ser medido, es decir, podemos asignarle un número no negativo x al que llamamos su longitud. Como este número dependerá exclusivamente de la posición del punto Y, podremos designarlo por el símbolo «$f(Y)$» y tendremos, por consiguiente, que:

$$x = f(Y).$$

Ahora bien, también recíprocamente para cada número no negativo x podemos construir un único segmento OY situado sobre la semirrecta considerada, cuya longitud sea igual a x; en otras palabras, a todo x corresponde exactamente un punto Y tal que

$$x = f(Y).$$

La función f es, pues, biunívoca; establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de la semirrecta y los números no

negativos (sería igualmente simple establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de toda la recta y todos los números reales). Otro ejemplo lo constituye la relación expresada por la fórmula:

$$x = -y.$$

Ésta es una función biunívoca, porque a todo número x le corresponde un único número y que satisface la fórmula dada; con facilidad se ve que dicha función aplica biunívocamente, por ejemplo, el conjunto de todos los números positivos sobre el de todos los números negativos. Por último, consideraremos la relación expresada por la fórmula:

$$x = 2y,$$

asumiendo que en ella, el símbolo «y» denota únicamente números naturales. Se trata de nuevo de una función biunívoca; ella asigna a cada número natural y un número par $2y$, y recíprocamente, a todo número par x exactamente un número y tal que $2y = x$, a saber, el número $y = {}^1/_2\, x$. Con ello la función considerada establece una correspondencia biunívoca entre números naturales cualesquiera y números naturales pares. Aun podíamos tomar de la geometría numerosísimos ejemplos de funciones y correspondencias biunívocas (simetrías, colineaciones, etc.).

*Gracias a la circunstancia de disponer del concepto de correspondencia biunívoca, estamos ahora en situación de establecer con exactitud la definición de un concepto que antes sólo pudimos caracterizar de un modo intuitivo y poco preciso. Se trata del concepto de coordinabilidad de clases (cf. Sección 26). Ahora diremos que dos clases K y L son coordinables, o que tienen el mismo número cardinal, si existe una función que establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambas clases. En virtud de esta definición, de los ejemplos recién estudiados se desprende que el conjunto de los puntos de una semirrecta cualquiera es coordinable con el de todos los números no negativos; el de todos los números positivos con el de todos los números negativos y el de todos los números naturales con el de los números naturales pares. El último ejemplo es particularmente instruc-

tivo: muestra que una clase puede ser coordinable con una de sus subclases propias. A primera vista, este resultado puede parecer paradójico a algunos lectores, ya que usualmente se comparan sólo clases finitas con respecto al número de sus elementos y, en efecto, una clase finita tiene un número cardinal mayor que cada una de sus partes, La paradoja desaparece al recordar que el conjunto de todos los números naturales es infinito y que nada nos autoriza a adscribir a las clases infinitas propiedades observadas exclusivamente en las clases finitas. Es digno de notarse que no sólo el conjunto de los números naturales, sino cualquier clase infinita es coordinable con una de sus subclases propias. Esta propiedad es característica, por consiguiente, de las clases infinitas y permite distinguirlas de las finitas: una clase finita puede definirse, simplemente, como una clase que no es coordinable con ninguna de sus subclases propias. (Sin embargo, esta definición lleva consigo una dificultad lógica, en cuya discusión no nos detendremos aquí.)[1*]

34. Relaciones múltiples. Funciones de varias variables y operaciones

Hasta ahora hemos estudiado únicamente RELACIONES BINARIAS, esto es, relaciones que rigen entre dos objetos. Sin embargo, en varias ciencias encontramos a menudo RELACIONES TERNARIAS y, en general, RELACIONES MÚLTIPLES. En geometría, por ejemplo, la relación de estar entre constituye un ejemplo típico de relación ternaria; ella rige entre tres puntos de una recta y es expresada simbólicamente por la fórmula:

$$A/B/C$$

que se lee:

el punto B está entre los puntos A y C.

---

[1] El primero en llamar la atención sobre la propiedad de las clases finitas discutida aquí, fue el filósofo y matemático austriaco B. BOLZANO (1781-1848) en su libro *Paradoxien des Unendlichen* (Leipzig, 1851, publicación póstuma). En esta obra se encuentran los comienzos de la teoría moderna de conjuntos. La propiedad mencionada fue posteriormente empleada por PEIRCE (cf. nota 1 en la pág. 37) y otros en la formulación de definiciones exactas de los conceptos de clase finita y clase infinita.

También la aritmética provee numerosos ejemplos de relaciones ternarias; basta mencionar la relación que rige entre tres números x, y, z, cuando el primero es la suma de los otros dos:

$$x = y + z,$$

así como otras relaciones similares como las expresadas por las siguientes fórmulas:

$$x = y - z,$$
$$x = y \cdot z,$$
$$x = y : z.$$

La relación que rige entre cuatro puntos, A, B, C y D, si, y sólo si, la distancia entre los dos primeros es igual a la distancia entre los dos últimos, o con otras palabras, cuando los segmentos AB y CD son congruentes, puede servir de ejemplo de relación cuaternaria. Otro ejemplo es la relación que rige entre cuatro números, x, y, z y t, cuando forman una proporción:

$$x : y = z : t.$$

De la totalidad de las relaciones múltiples, conviene destacar las relaciones funcionales correspondientes a las relaciones funcionales binarias. Por razones de sencillez nos limitaremos a la discusión de relaciones ternarias de este tipo. R es llamada una RELACIÓN FUNCIONAL TERNARIA si a todo par de objetos y, z le corresponde a lo sumo un objeto x que tiene con aquéllos la relación dada. Designaremos este objeto unívocamente determinado, siempre que exista, o bien por el símbolo:

$$R(y, z)$$

o bien por el símbolo:

$$y\,R\,z$$

(que toma ahora un significado diferente del que tenía en la teoría de relaciones binarias).

Para expresar, por lo tanto, que x se encuentra con y y z en la relación funcional R, disponemos de dos fórmulas:

$$x = R(y, z) \quad \text{y} \quad x = y\,R\,z.$$

A esta doble notación simbólica corresponde también una doble manera de expresarse. Al aplicar la notación:

$$x = R(y, z),$$

la relación R es llamada una FUNCIÓN; para distinguir entre relaciones funcionales binarias y ternarias, hablaremos en el primer caso de FUNCIONES DE UNA VARIABLE O DE UN ARGUMENTO, y en el segundo, de FUNCIONES DE DOS VARIABLES O DE DOS ARGUMENTOS. Análogamente, las relaciones funcionales cuaternarias se llamarán FUNCIONES DE TRES VARIABLES O DE TRES ARGUMENTOS, etcétera. Para la designación de funciones de un número arbitrario de argumentos, se emplean de ordinario las variables «f», «g», ...; la fórmula:

$$x = f(y, z)$$

se lee:

x es el valor de la función f que corresponde a los valores y y *z del argumento.*

En el caso de utilizar la notación simbólica:

$$x = y\,R\,z,$$

es corriente llamar a la relación R OPERACIÓN o, específicamente, OPERACIÓN BINARIA; la fórmula que se acaba de indicar se lee:

x es el resultado de llevar a cabo la operación R con y y z;

en este caso, en lugar de la letra «R», suelen emplearse otras, en particular la letra «O». Como ejemplos, pueden servir las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división, así como las operaciones lógi-

cas de adición y multiplicación de clases o relaciones (véanse las Secciones 25 y 28). El contenido de los conceptos de función de dos variables y de operación binaria, es evidentemente el mismo. Quizá deberíamos advertir que también a las funciones de una variable se las llama a veces operaciones y, en particular, OPERACIONES UNARIAS; en el cálculo de clases, por ejemplo, la formación del complemento se considera como operación y no como función.

A pesar de que las relaciones múltiples desempeñan un papel importante en varias ciencias, la teoría general de éstas está todavía en su etapa inicial; al hablar de relaciones o de la teoría de relaciones se piensa por lo regular en relaciones binarias. Sólo una cierta categoría de relaciones ternarias se ha estudiado hasta ahora con mayor detalle, a saber: una categoría de operaciones binarias de las que, como prototipo, puede servir la adición aritmética corriente. Estas investigaciones se completan en el ámbito de una disciplina matemática especial, la teoría de grupos; en la segunda parte de este libro veremos algunos conceptos de esta teoría, y, por lo tanto, ciertas propiedades generales de operaciones binarias.

35. Importancia de la lógica para otras ciencias

Hemos hablado de los conceptos más importantes de la lógica contemporánea. Y al hacerlo, hemos conocido algunas leyes (muy pocas, por lo demás) relativas a estos conceptos. No teníamos, sin embargo, la intención de establecer la lista completa de los conceptos y teoremas lógicos de que nos servimos, o sobre los cuales nos apoyamos, en argumentos científicos. Por lo demás, esto no es necesario para el estudio o ejercicio de otras ciencias, inclusive la matemática, cuya relación con la lógica es especialmente cercana. La lógica se considera justificadamente como la base de todas las otras ciencias, por el hecho de que en todo razonamiento empleamos conceptos del dominio de la lógica, y porque toda inferencia correcta procede de acuerdo con las leyes de esta disciplina. Pero esto no implica que un conocimiento profundo de lógica sea condición necesaria para el pensar correcto; incluso los matemáticos profesionales, que por lo general no cometen errores al razonar, no conocen de ordinario la lógica hasta el grado de

saber todas las leyes de ésta en las que se apoyan inconscientemente. No obstante, no cabe ninguna duda de que el conocimiento de la lógica posee una gran importancia práctica para todo aquel que desee pensar e inferir correctamente, pues perfecciona las facultades innatas o adquiridas para ello y permite evitar errores en casos especialmente críticos. También desde el punto de vista teórico desempeña la lógica un papel transcendental en la construcción de teorías matemáticas; este problema se tratará en el capítulo próximo.

Ejercicios

1. Mostrar ejemplos de relaciones de los dominios de la aritmética, la geometría, la física y la vida cotidiana.

2. Consideremos la relación de paternidad, es decir, la relación expresada por la función proposicional:

x es padre de y.

¿Pertenecen todos los seres humanos al dominio de esta relación? ¿Pertenecen todos ellos al contradominio?

3. Considérense las siete relaciones siguientes entre personas, a saber: ser padre, madre, hijo (en sentido genérico, sin discriminación de sexo), hermano, hermana, marido, esposa. Denotaremos estas relaciones con los símbolos: «**P**», «**M**», «**H**», «**B**», «**S**», «**F**» y «**E**», respectivamente. Aplicando varias operaciones definidas en la Sección 28, podemos hallar nuevas relaciones que en algunos casos tienen nombres simples en el lenguaje ordinario, por ejemplo «**F/H**» designa la relación de ser yerno, como puede comprobarse fácilmente. Encontrar, si es posible, nombres simples para las siguientes relaciones:

$$\breve{\mathbf{B}},\ \breve{\mathbf{F}},\ \mathbf{F} \cup \mathbf{E},\ \mathbf{P} \cup \mathbf{B},\ \mathbf{P}/\mathbf{M},\ \mathbf{M}/\breve{\mathbf{H}},\ \mathbf{B}/\breve{\mathbf{H}},\ \mathbf{P}/(\mathbf{F} \cup \mathbf{E}),$$
$$(\mathbf{B}/\breve{\mathbf{H}}) \cup [\mathbf{F}/(\mathbf{S}/\breve{\mathbf{H}})]$$

Expresar con la ayuda de los símbolos «**P**», «**M**», etc., junto con los símbolos del cálculo de relaciones, las relaciones de ser proge-

nitor (o sea padre en sentido genérico, sin discriminación del sexo), hermano (sin discriminación de sexo), nieto (sin discriminación de sexo), nuera, suegra.

Explicar el significado de las siguientes fórmulas y determinar cuáles de ellas son verdaderas:

$$\mathbf{P} \subset \mathbf{M}', \quad \breve{\mathbf{B}} = \mathbf{S}, \quad \mathbf{P} \cup \mathbf{M} = \breve{\mathbf{H}}, \quad \mathbf{F}/\mathbf{M} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{B}/\mathbf{S} \subset \mathbf{B}, \quad \mathbf{S} \subset \mathbf{H}/\breve{\mathbf{H}}.$$

4. Considérense las dos fórmulas siguientes del cálculo de relaciones:

$$R/S = S/R \quad \text{y} \quad \breve{(R/S)} = \breve{S}/\breve{R}.$$

Muéstrese mediante un ejemplo que la primera no siempre se satisface, y demuéstrese que la segunda se satisface para relaciones R y S cualesquiera.

Indicación: Considérese qué significado tiene decir que la relación $\breve{(R/S)}$ (o sea la recíproca de la relación R/S) o que la relación $\breve{S}/\breve{R}$ rigen entre dos objetos x e y.

5. Formúlense simbólicamente las definiciones de todos los términos del cálculo de relaciones discutidos en la Sección 28.

Indicación: La definición de suma de dos relaciones, por ejemplo, tiene la siguiente forma:

$$[x(R \cup S)y] \leftrightarrow [(x\, R\, y) \vee (x\, S\, y)].$$

6. ¿Qué propiedades de las tratadas en la Sección 29 son poseídas por las relaciones siguientes:

(a) la relación de divisibilidad en el conjunto de los números naturales;

(b) la relación de ser relativamente primo en el conjunto de los números naturales (dos números naturales se llaman relativamente primos cuando su máximo común divisor es 1);

(c) la relación de congruencia en el conjunto de todos los polígonos;

(d) la relación de ser de mayor longitud en el conjunto de todos los segmentos;

(e) la relación de ser perpendicular en el conjunto de todas las rectas de un plano;

(f) la relación de simultaneidad en la clase de todos los fenómenos físicos;

(g) la relación de preceder temporalmente en la clase de todos los acontecimientos físicos;

(h) la relación de parentesco en la clase de las personas;

(i) la relación de paternidad en la clase de todas las personas;

(j) la relación de intersección en el conjunto de todas las configuraciones geométricas?

7. ¿Es toda relación (en una clase dada) o bien reflexiva o irreflexiva, o bien simétrica o asimétrica? Indicar ejemplos.

8. Llamaremos INTRANSITIVA EN LA CLASE K a la relación R, si para tres elementos cualesquiera x, y y z de K, las fórmulas:

$$x\,R\,y \quad \text{e} \quad y\,R\,z$$

implican la fórmula:

$$\sim (x\,R\,z).$$

¿Cuáles de las relaciones citadas en los Ejercicios 3 y 6 son intransitivas? Indicar otros ejemplos de relaciones intransitivas. ¿Es toda relación, o bien transitiva, o bien intransitiva?

*9. Mostrar cómo se puede pasar de la expresión:

las rectas a y *b son paralelas*

a la expresión equivalente:

las direcciones de las rectas a y *b son idénticas*,

y cómo definir, en conexión con esto, la expresión «*la dirección de una recta*».

Hágase el mismo ejercicio con las expresiones siguientes:

los segmentos AB y CD son congruentes

y

las longitudes de los segmentos AB y CD son iguales.

¿Qué ley lógica se aplica para ello?

Indicación: Véanse las observaciones de la Sección 30 relativas al concepto de semejanza.

10. Diremos que dos signos, o dos expresiones compuestas por varios signos, son EQUIFORMES, si no se diferencian en nada respecto de la forma, sino a lo sumo respecto de su posición en el espacio, como, por ejemplo, respecto del lugar en donde han sido impresas; en caso contrario, los llamaremos NO EQUIFORMES. Por ejemplo, en la fórmula:

$$x = x$$

aparecen variables equiformes a ambos lados del signo de igualdad, y en la fórmula:

$$x = y$$

variables no equiformes. ¿De cuántos signos consta la fórmula

$$x + y = y + x \text{ ?}$$

¿En cuántos grupos pueden clasificarse dichos signos de manera que signos equiformes pertenezcan al mismo grupo y signos no equiformes pertenezcan a grupos distintos?

¿Cuáles de las propiedades expresadas en la Sección 29 son poseídas por las relaciones de equiformidad y no equiformidad?

*11. Sobre la base del resultado del ejercicio anterior, explíquese por qué se puede decir de signos equiformes que son iguales respecto de su FORMA, o que tienen la misma forma, y cómo puede definirse el término «*la forma del signo dado*» (véase Ejercicio 9).

Es una costumbre extendida llamar iguales a los signos equiformes e incluso tratarlos como si fueran un mismo signo. Suele decirse, por ejemplo, que en la expresión:

$$x + x$$

interviene una misma variable a ambos lados del símbolo «+». ¿Cómo puede expresarse esto con mayor exactitud?

*12. La manera inexacta de hablar sobre la que hemos llamado la atención en el Ejercicio 11, ha sido usada varias veces en este libro (ya hemos dicho que no conbatiremos las costumbres profundamente arraigadas). Indicar las inexactitudes de este tipo que aparecen en las páginas 35 y 82, y explicar cómo podrían ser evitadas.

Daremos otro ejemplo de este tipo: cuando se habla de funciones proposicionales con una variable libre, se piensa en funciones en las que todas las variables libres son equiformes. ¿Cómo puede formularse con exactitud la expresión:

función proposicional con dos variables libres ?

13. Consideremos el conjunto de todos los círculos situados en un mismo plano y con un mismo centro común. Mostrar que este conjunto queda ordenado por medio de la relación de ser parte. ¿Sería esto verdad, si los círculos no estuviesen en un mismo plano o no fuesen concéntricos?

14. Consideraremos una relación entre palabras del idioma castellano que será llamada la relación de PRECEDENCIA (EN ORDEN LEXICOGRÁFICO). Explicaremos aquí el significado de este término por medio de ejemplos. La palabra «*animal*» precede a la palabra «*perro*», puesto que la primera empieza con «*a*» y la segunda con «*p*», y «*a*» ocupa un lugar anterior a «*p*» en el alfabeto castellano. La palabra «*aire*» precede a la palabra «*alimaña*», ya que ambas comienzan con la misma letra (o mejor dicho con letras equiformes; cf. Ejercicio 10), en tanto que la segunda letra de la primera palabra, esto es «*i*», ocupa un lugar anterior en el alfabeto castellano a la segunda letra de la segunda pala-

bra, esto es «*l*». Análogamente, «*cobre*» precede a «*coco*» y «*maldito*» precede a «*malón*». Finalmente, «*dolor*» precede a «*doloroso*», ya que las cinco primeras letras de estas palabras son las mismas, y la primera palabra consta solamente de ellas, mientras que la segunda posee además otras; análogamente, «*par*» precede a «*paridad*».

Escribir las siguientes palabras en línea, de modo que entre dos cualesquiera la de la izquierda preceda a la de la derecha:

carroña, arma, salir, arte, carro, salen, problema, armazón, asta.

Trátese de definir la relación de precedencia entre palabras de la manera más general posible. Mostrar que esta relación ordena el conjunto de todas las palabras del idioma castellano. Señálense algunas aplicaciones prácticas de esta relación y explíquese por qué se dice que establece un orden lexicográfico.

15. Considérense una relación arbitraria R y su negación R'. Mostrar que las siguientes proposiciones de la teoría de relaciones son verdaderas:

(a) *si la relación R es reflexiva en la clase K, entonces la relación R' es irreflexiva en esa clase;*

(b) *si la relación R es simétrica en la clase K, entonces la relación R' es también simétrica en la clase K;*

*(c) *si la relación R es asimétrica en la clase K, entonces la relación R' es reflexiva y conexa en esa clase;*

*(d) *si la relación R es transitiva y conexa en la clase K, entonces la relación R' es transitiva en esa clase.*

¿Son también verdaderas las recíprocas de estas proposiciones?

16. Muéstrese que, si la relación R tiene una de las propiedades estudiadas en la Sección 29, la relación conversa $\breve{R}$ posee la misma propiedad.

*17. Las propiedades de relaciones que fueron introducidas en la Sección 29 pueden expresar fácilmente en términos del cálcu-

lo de relaciones, admitiendo que la clase K a la cual esas propiedades se refieren es la clase universal. Las fórmulas:

$$R/R \subset R \quad \text{y} \quad \mathsf{D} \subset R \cup \breve{R},$$

por ejemplo, expresan que la relación R es transitiva y conexa, respectivamente. Explicar por qué; recordar el significado del símbolo «D» de la Sección 28. Expresar análogamente que la relación R es simétrica, asimétrica o intransitiva (véase Ejercicio 8). ¿Qué propiedad de relaciones estudiada en el presente capítulo se expresa por la fórmula:

$$R/\breve{R} \subset \mathsf{I} \ ?$$

18. Estudiar cuáles de las relaciones expresadas por las fórmulas indicadas a continuación son funciones:

(a) $2x + 3y = 12$,
(b) $x^2 = y^2$,
(c) $x + 2 > y - 3$,
(d) $x + y = y^2$,
(e) x *es madre de* y,
(f) x *es hija de* y.

¿Cuáles de las relaciones consideradas en el Ejercicio 3 son funciones?

19. Consideremos la función expresada mediante la fórmula:

$$x = y^2 + 1.$$

¿Cuál es el conjunto de los valores del argumento y cuál el de los valores de la función?

*20. ¿Cuáles de las funciones indicadas en el Ejercicio 18 son biunívocas? Dar otros ejemplos de funciones biunívocas.

*21. Considérese la función expresada por la fórmula:

$$x = 3y + 1.$$

Mostrar que se trata de una función biunívoca que aplica biunívocamente el intervalo [0,1] sobre el [1,4] (cf. Ejercicio 6, Capítulo IV). ¿Qué consecuencia puede extraerse de aquí respecto a los números cardinales de dichos intervalos?

*22. Considérese la función expresada por la fórmula:

$$x = 2y;$$

tomando como ejemplo el ejercicio anterior, mostrar con ayuda de esta función que el conjunto de todos los números es coordinable con el conjunto de los números positivos.

*23. Mostrar que el conjunto de todos los números naturales es coordinable con el de todos los números impares.

24. Indicar ejemplos de relaciones múltiples de los dominios de la aritmética y de la geometría.

25. ¿Cuáles de las relaciones ternarias expresadas por las fórmulas siguientes son funciones:

(a) $x + y + z = 0$,
(b) $x \cdot y > 2z$,
(c) $x^2 = y^2 + z^2$,
(d) $x + 2 = y^2 + z^2$?

26. Enumerar algunas leyes de la física que establezcan la existencia de relaciones funcionales entre dos, tres y cuatro magnitudes.

27. Consideremos la relación de estar entre expresada simbólicamente por la fórmula $A/B/C$, donde A, B y C son tres puntos diferentes del plano (cf. pág. 136). Escribir simbólicamente las siguientes proposiciones:

(a) *Para puntos cualesquiera A, B, C y D, si B está entre A y C y también entre A y D, entonces C está entre A y D.*

(b) *Para puntos cualesquiera A y B, si A y B son distintos, entonces existe un punto C tal que B no está entre A y C ni C está entre B y A ni A está entre B y C.*

Tradúzcanse también las siguientes fórmulas al lenguaje ordinario:

(c) $\underset{A}{\mathsf{A}}\underset{B}{\mathsf{A}}\underset{C}{\mathsf{A}}\underset{D}{\mathsf{A}}\,[(B \neq C \land A/B/D \land A/C/D) \rightarrow (A/B/C \lor C/B/D)]$,

(d) $\underset{A,\,C}{\mathsf{E}}\,[A \neq C \land \underset{B}{\mathsf{A}} \sim (A/B/C)]$.

¿Cuáles de las proposiciones (a) - (d) son verdaderas? (no suponer que los puntos en cuestión están necesariamente alineados).

*28. Considérense las tres siguientes fórmulas con la operación binaria O:

$$\underset{x,\,y}{\mathsf{A}}\,(x\,O\,y = y\,O\,x), \qquad \underset{x,\,y,\,z}{\mathsf{A}}\,[(x\,O\,y)Oz = xO(y\,O\,z)],$$

$$\underset{x,\,y,\,z}{\mathsf{A}\,\mathsf{E}}\,(x = y\,O\,z).$$

Sustituir sucesivamente en estas fórmulas las símbolos de las cuatro operaciones aritméticas: $+$, —, $\cdot$, y :, en lugar de O. ¿Cuáles de las proposiciones resultantes son verdaderas?

VI

SOBRE EL MÉTODO DEDUCTIVO

36. Constituyentes fundamentales de teorías deductivas; términos primitivos y definidos, axiomas y teoremas

A continuación intentaremos exponer los principios fundamentales que se aplican en la construcción de la lógica y la matemática[1]. El análisis detallado y la evaluación crítica de esos principios constituyen la tarea de una disciplina especial llamada METODOLOGÍA DE LAS CIENCIAS DEDUCTIVAS O METODOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA. Para el que se ocupa de una ciencia o intenta estudiarla, es indudablemente importante tener conocimiento del método que se emplea en la construcción de esa ciencia; en el caso de la matemática veremos que el conocimiento de este método es de importancia fundamental, ya que sin tal conocimiento es imposible aprehender la naturaleza de la matemática.

Los principios que vamos a estudiar tienen por objeto asegurar al conocimiento adquirido en lógica y matemática el mayor grado posible de claridad y certeza. Desde este punto de vista sería ideal un procedimiento que permitiese aclarar el significado de cada expresión que aparece en la ciencia considerada, y justificar cada una de sus aserciones. Es fácil ver que este ideal no es

---

[1] Ideas íntimamente relacionadas a las presentadas en esta sección pueden ya encontrarse en obras anteriores. Véase, por ejemplo, el opúsculo (publicado póstumamente), *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, del gran filósofo y matemático francés B. PASCAL (1623-1662).

realizable. En efecto, cuando se trata de explicar el significado de una expresión hay que emplear, necesariamente, otras expresiones; y para explicar el significado de esas expresiones, sin caer en un círculo vicioso, se debe recurrir a su vez a otras expresiones, y así sucesivamente. Tenemos así el comienzo de un proceso que nunca podría terminarse, y que puede caracterizarse, hablando figurativamente, como un REGRESO INFINITO —un *regressus in infinitum*. La situación es análoga en lo que se refiere a la justificación de las aserciones de la ciencia considerada, ya que para establecer la validez de una aserción es necesario usar otras, y (si queremos evitar un círculo vicioso) esto conduce nuevamente a un regreso infinito.

A manera de compromiso entre ese ideal inasequible y las posibilidades realizables, han surgido ciertos principios sobre la construcción de disciplinas matemáticas, que pueden ser descritos de la manera siguiente.

Al emprender la construcción de una determinada disciplina, distinguimos ante todo un pequeño grupo de expresiones de ella que nos parezcan inmediatamente comprensibles; las expresiones de este grupo serán llamadas TÉRMINOS PRIMITIVOS o NO DEFINIDOS y las emplearemos sin explicar su significado. Al mismo tiempo adoptamos el principio: no utilizar ninguna de las demás expresiones de la disciplina considerada, en tanto su significado no se haya determinado previamente con ayuda de los términos primitivos y de expresiones de la disciplina cuyo significado ya haya sido explicado. La proposición que de esta manera determina el significado de un término es llamada una DEFINICIÓN, y las expresiones cuyos significados son así determinados reciben el nombre de TÉRMINOS DEFINIDOS.

Procedemos análogamente con respecto a las aserciones de la disciplina considerada. Elegimos algunas de éstas —las que nos parezcan más evidentes— como ASERCIONES PRIMITIVAS o AXIOMAS (también referidos a menudo como POSTULADOS, aunque en este libro no se usará dicho término en este sentido técnico); los aceptaremos como verdaderos sin en modo alguno establecer su validez. Por otra parte, toda otra aserción será aceptada como verdadera sólo si hemos podido establecer su validez usando únicamente axiomas, definiciones y aquellas aserciones cuya validez

haya sido establecida previamente. Como es bien sabido, aserciones establecidas de esta manera son llamadas ASERCIONES DEMOSTRADAS O TEOREMAS, y el proceso por el cual se las establece es llamado una DEMOSTRACIÓN. Más generalmente, si dentro de la lógica o la matemática establecemos un enunciado en base a otros, nos referimos a este proceso como una DERIVACIÓN O DEDUCCIÓN, y decimos que el enunciado establecido ha sido DERIVADO O DEDUCIDO o es CONSECUENCIA de esos otros enunciados.

La lógica matemática actual es una disciplina construida de acuerdo con los principios que acabamos de exponer; desgraciadamente no ha sido posible, dentro del estrecho marco de este libro, dar debida atención a este importante hecho. Cualquier otra disciplina construida de acuerdo con estos principios debe basarse en la lógica; por así decir, presupone la lógica. Esto quiere decir que todas las expresiones y leyes de la lógica se tratan en pie de igualdad con los términos primitivos y axiomas de la disciplina en construcción; los términos lógicos se usan, por ejemplo, en la formulación de los axiomas, teoremas y definiciones sin necesidad de explicarse su significado, y las leyes lógicas se aplican en demostraciones sin establecer previamente su validez. En la construcción de algunas disciplinas es conveniente a veces presuponer, en ese mismo sentido, no sólo la lógica, sino además ciertas disciplinas matemáticas construidas previamente; por razones de brevedad podemos denominar tales teorías, junto con la lógica, las DISCIPLINAS PRECEDENTES A LA DISCIPLINA DADA. Así, la lógica no presupone ninguna disciplina precedente; en la construcción de la aritmética como disciplina matemática especial se presupone la lógica como única disciplina precedente; por otra parte, en el caso de la geometría es ventajoso —aunque no inevitable— presuponer no sólo la lógica, sino también la aritmética.

En relación con las últimas observaciones es necesario hacer algunas rectificaciones en la formulación de los principios expuestos anteriormente. Antes de emprender la construcción de una disciplina deben enumerarse las disciplinas precedentes; todos los requisitos referentes a la definición de expresiones y demostración de aserciones se aplicarán, pues, solamente a las expresiones y aserciones específicas de la disciplina en construcción, es decir, a las que no pertenecen a las disciplinas precedentes.

El método de construcción de una disciplina basado en una observación estricta de los principios expuestos más arriba, se denomina MÉTODO DEDUCTIVO, y las disciplinas construidas de esta manera se llaman TEORÍAS DEDUCTIVAS[1]. Está cada vez más extendida la opinión de que el método deductivo es el único rasgo esencial que distingue a las disciplinas matemáticas de toda otra ciencia; no sólo es toda disciplina matemática una teoría deductiva, sino que, recíprocamente, toda teoría deductiva es una disciplina matemática (de acuerdo a este punto de vista la lógica deductiva está incluida entre las disciplinas matemáticas). No entraremos aquí en la discusión de las razones en favor de este punto de vista; solamente observaremos que pueden darse argumentos de peso en su favor.

37. Modelo e interpretación de una teoría deductiva

Como resultado de una aplicación sistemática de los principios presentados en la sección precedente, las teorías deductivas adquieren ciertas características interesantes e importantes que describiremos aquí. Como las cuestiones que vamos a discutir son de un carácter algo complicado y abstracto, trataremos de elucidarlas por medio de un ejemplo concreto.

Supongamos que nos interesan hechos generales sobre la congruencia de segmentos, y que deseamos construir este fragmento de geometría como una teoría deductiva especial. Para ello estipulamos que las variables «*x*», «*y*», «*z*», ..., designan segmentos. Como términos primitivos elegimos los símbolos «S» y «$\cong$». El primero de ellos es una abreviatura del término «*el conjunto de*

[1] El método deductivo no puede ser considerado una conquista de los tiempos modernos. Ya en los *Elementos* del matemático griego EUCLIDES (alrededor de 300 años antes de Jesucristo), encontramos una exposición de la geometría, que desde el punto de vista de los principios metodológicos expuestos deja muy poco que desear. Durante 2.200 años, la obra de EUCLIDES ha sido, para los matemáticos, el ideal y prototipo de la exactitud científica. En realidad, en este terreno no se consiguió un progreso esencial hasta los últimos setenta años, en el transcurso de los cuales las disciplinas matemáticas básicas, geometría y aritmética, se han fundamentado de acuerdo a todas las exigencias de la actual metodología de la matemática. Entre las obras a las cuales debemos este progreso mencionaremos al menos dos que ya han tomado importancia histórica: la obra colectiva *Formulaire de Mathématiques* (Turín, 1895-1908), cuyo editor y autor principal fue el matemático y lógico italiano G. PEANO (1858-1932), y *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig y Berlín, 1899) del gran matemático alemán D. HILBERT (1862-1943).

todos los segmentos»; el segundo designa la relación de congruencia, de modo que la fórmula:

$$x \cong y$$

debe leerse como sigue:

los segmentos x e y son congruentes.

Adoptaremos además dos axiomas:

AXIOMA I. *Para todo elemento* x *del conjunto* $\mathbf{S}$, $x \cong x$ (en otras palabras: *todo segmento es congruente consigo mismo*).

AXIOMA II. *Para elementos cualesquiera* x, y, z *del conjunto* $\mathbf{S}$, *si* $x \cong z$ *e* $y \cong z$, *entonces* $x \cong y$ (en otras palabras: *dos segmentos congruentes con un tercero son congruentes entre sí*).

De estos axiomas se pueden deducir varios teoremas sobre la congruencia de segmentos, como por ejemplo:

TEOREMA I. *Para elementos cualesquiera* y, z *del conjunto* $\mathbf{S}$, *si* $y \cong z$, *entonces* $z \cong y$.

TEOREMA II. *Para elementos cualesquiera* x, y, z *del conjunto* $\mathbf{S}$, *si* $x \cong y$ *e* $y \cong z$, *entonces* $x \cong z$.

Las demostraciones de estos dos teoremas son muy fáciles. Como ejemplo, esbozaremos la demostración del primero.

Sustituyendo «x» por «z» en el Axioma II, obtenemos:

para elementos cualesquiera y, z *del conjunto* $\mathbf{S}$,
si $z \cong z$ *e* $y \cong z$, *entonces* $z \cong y$.

En la hipótesis de este enunciado, aparece la fórmula:

$$z \cong z,$$

que indudablemente es válida, en virtud del Axioma I, y, por lo tanto, podremos omitirla. De esta manera se obtiene el teorema en cuestión.

Con respecto a estas sencillas consideraciones deseamos hacer las siguientes observaciones.

Nuestra teoría deductiva en miniatura se basa en un sistema de axiomas y términos primitivos adecuadamente seleccionado. Nuestro conocimiento de los objetos denotados por los términos primitivos, es decir, de los segmentos y de su congruencia, es muy amplio y no es agotado de ninguna manera por los axiomas adoptados. Pero este conocimiento es, por decir así, asunto privado nuestro y no ejerce la más mínima influencia sobre la construcción de nuestra teoría. En particular, al deducir teoremas de los axiomas no hacemos ningún empleo de este conocimiento, y nos comportamos como si no comprendiéramos el contenido de los conceptos involucrado en nuestras consideraciones, y como si no supiéramos nada de ellos que ya no hubiera sido expresamente afirmado en los axiomas. Despreciamos, como se dice generalmente, el significado de los términos primitivos que hemos adoptado, y enfocamos nuestra atención exclusivamente sobre la forma de los axiomas en que se dan estos términos.

Esto implica una consecuencia muy significativa e interesante. Reemplacemos los términos primitivos en todos los axiomas y teoremas de nuestra teoría por variables adecuadas, por ejemplo, el símbolo «S» por la variable «K» que denota clases, y el símbolo «$\cong$» por la variable «R» que denota relaciones (a fin de simplificar nuestra discusión, no consideraremos aquí teoremas que contengan términos definidos). Las afirmaciones de nuestra teoría ya no serán más proposiciones, sino se transformarán en funciones proposicionales que contienen dos variables libres, «K» y «R», y que expresan en general el hecho de que la relación R tiene esta o aquella propiedad en la clase K (o, con mayor precisión, que esta o aquella relación rige entre K y R, véase Sección 27). Por ejemplo, como se puede ver fácilmente, el Axioma I y los Teoremas I y II expresarán ahora que la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente, en la clase K. El Axioma II expresará una propiedad para la que no tenemos ningún nombre especial y a la que nos referiremos como propiedad **P**; es la propiedad siguiente:

para elementos x, y, z cualesquiera de la clase K, si xRz e yRz, entonces xRy.

Puesto que en las demostraciones de nuestra teoría no hacemos uso de ninguna propiedad de la clase de segmentos y de la relación de congruencia, salvo aquellas que fueron explícitamente enunciadas en los axiomas, toda demostración puede ser considerablemente generalizada, pues puede ser aplicada a cualquier clase K y a cualquier relación R que tenga esas propiedades. Como resultado de una generalización de esa naturaleza de las demostraciones, podemos correlacionar con cualquier teorema de nuestra teoría una ley general correspondiente al dominio de la lógica, a saber, a la teoría de relaciones, y que afirme que toda relación R que es reflexiva y tiene la propiedad **P** en la clase K posee también la propiedad expresada en el teorema considerado. Así, por ejemplo, las dos leyes siguientes de la teoría de relaciones corresponden a los Teoremas I y II:

I′. *Toda relación R que es reflexiva en la clase K y tiene la propiedad* **P** *en esa clase es también simétrica en K.*

II′. *Toda relación R que es reflexiva en la clase K y tiene la propiedad* **P** *en esa clase es también transitiva en K.*

Si una relación R es reflexiva y tiene la propiedad **P** en una clase K, decimos que K y R forman juntas un MODELO o una REALIZACIÓN del sistema de axiomas de nuestra teoría, o simplemente que satisfacen a los axiomas. Por ejemplo, un modelo del sistema de axiomas está constituido por la clase de los segmentos y la relación de congruencia, es decir, los objetos denotados por los términos primitivos; naturalmente este modelo satisface también todos los teoremas deducidos de los axiomas. (Para hablar con exactitud, deberíamos decir que un modelo no satisface las afirmaciones mismas de la teoría, sino las funciones proposicionales obtenidas de dichas afirmaciones reemplazando los términos primitivos por variables.) Empero, este modelo particular no desempeña ningún papel privilegiado en la construcción de la teoría. Por el contrario, sobre la base de leyes lógicas universales como I′ y II′ llegamos a la conclusión general de que cualquier modelo del sistema de axiomas satisface todos los teoremas deducidos de estos axiomas. En consideración de este hecho también se hace referencia al modelo del sistema

de axiomas de nuestra teoría como a un MODELO DE LA TEORÍA misma.

Estamos en condiciones de exhibir muchos modelos diferentes para nuestro sistema de axiomas, aun en el dominio de la lógica y de la matemática. Para obtener un modelo de esa naturaleza, elegimos en cualquier otra teoría deductiva dos constantes, sean «K» y «R» (denotando la primera una clase y la última una relación), luego reemplazamos a «S» por «K» y a «$\cong$» por «R» en todo el sistema, y finalmente demostramos que las proposiciones así obtenidas son teoremas, o posiblemente axiomas, de la nueva teoría. Si logramos realizar esto con éxito, decimos que hemos hallado una INTERPRETACIÓN del sistema de axiomas —y, al mismo tiempo, de toda nuestra teoría deductiva— dentro de la otra teoría deductiva. Si reemplazamos ahora los términos primitivos «S» y «$\cong$» por «K» y «R», no solamente en los axiomas, sino también en todos los teoremas de nuestra teoría, podemos estar seguros por adelantado de que todas las proposiciones así obtenidas serán proposiciones verdaderas de la nueva teoría deductiva.

Daremos aquí dos ejemplos concretos de interpretaciones de nuestra teoría en miniatura. Reemplazamos en los Axiomas I y II el símbolo «S» por el símbolo de la clase universal «V», y el símbolo «$\cong$» por el signo de identidad «=». Como se puede observar inmediatamente, los axiomas se transforman entonces en leyes lógicas (en efecto, las Leyes II y V de la Sección 17 de manera ligeramente modificada). La clase universal y la relación de identidad constituyen, por lo tanto, un modelo del sistema de axiomas, y nuestra teoría ha hallado una interpretación dentro de la lógica. Así, si en los Teoremas I y II reemplazamos los símbolos «S» y «$\cong$» por los símbolos «V» y «=», podemos estar seguros de que llegaremos a proposiciones lógicas verdaderas. (En efecto, estamos nuevamente familiarizados con ellas; véase Leyes III y IV de la Sección 17.)

A continuación consideramos el conjunto de todos los números, o cualquier otro conjunto de números, denotándolo por «N». Llamamos equivalentes a dos números x e y, en símbolos:

$$x \equiv y,$$

si su diferencia $x - y$ es un entero; así tenemos, por ejemplo:

$$1\,{}^1/_4 \equiv 5\,{}^1/_4,$$

mientras no es el caso que

$$3 \equiv 2\,{}^1/_3.$$

Si ahora los términos primitivos son reemplazados en ambos axiomas por «**N**» y «≡», se puede demostrar fácilmente que las proposiciones resultantes son teoremas verdaderos de la aritmética. Así nuestra teoría posee una interpretación en la aritmética, pues el conjunto de números **N** y la relación de equivalencia ≡ constituyen un modelo del sistema de axiomas. Y nuevamente estamos seguros, sin ningún razonamiento especial, de que los Teoremas I y II se transformarán en proposiciones aritméticas verdaderas si son sometidos a la misma transformación que los axiomas.

Los hechos generales descritos más arriba tienen muchas aplicaciones interesantes en las investigaciones metodológicas. Ilustraremos esto aquí por medio de un solo ejemplo; mostraremos cómo se puede probar —en base a estos hechos— que no se pueden deducir ciertas proposiciones de nuestro sistema de axiomas.

Consideramos la siguiente proposición A (formulada solamente en términos lógicos y en los términos primitivos de nuestra teoría):

A. *Existen dos elementos x e y del conjunto* **S** *para los que no es el caso que* $x \cong y$ (en otras palabras: *existen dos segmentos que no son congruentes*).

Esta proposición parece ser indudablemente verdadera. No obstante, ningún intento para su demostración en base a los Axiomas I y II puede dar un resultado positivo. Así surge la conjetura de que la Proposición A no puede ser deducida de ninguna manera de nuestros axiomas. A fin de confirmar esta conjetura argumentamos de la manera siguiente. Si la Proposición A pudiera ser probada en base a nuestro sistema de axiomas, entonces, según sabemos, todo modelo de este sistema satisfaría a la proposición; por lo tanto, si podemos indicar un modelo de sistema de axiomas tal que no satisfaga la Proposición A, probamos con

ello que esta proposición no puede ser deducida de los Axiomas I y II. Ahora bien, la obtención de un modelo tal no presenta ninguna dificultad. Consideremos, por ejemplo, el conjunto de todos los enteros I (o cualquier otro conjunto de enteros, por ejemplo, el conjunto consistente en los números 0 y 1 solamente) y la relación de equivalencia $\equiv$ entre números que fue discutida anteriormente. Sabemos ya en base a las observaciones precedentes que el conjunto I y la relación $\equiv$ constituyen un modelo de nuestro sistema de axiomas; empero, la Proposición A no es satisfecha por este modelo, pues no hay dos enteros x e y que no sean equivalentes, es decir, cuya diferencia no sea un entero. Otro modelo conveniente para este fin está constituido por una clase arbitraria de individuos y por la relación universal V que rige entre dos individuos cualesquiera.

El tipo de razonamiento recién aplicado se conoce como el MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN POR EXHIBICIÓN DE UN MODELO O POR INTERPRETACIÓN.

Los hechos y conceptos discutidos aquí pueden ser relacionados con otras teorías deductivas sin efectuar un cambio esencial. En la sección próxima trataremos de describirlos en un modo bastante general.

38. Ley de deducción; carácter formal de las ciencias deductivas

*Consideramos una teoría deductiva cualquiera basada sobre un sistema de términos primitivos y axiomas. A fin de simplificar nuestras consideraciones, suponemos que esta teoría presupone solamente la lógica, es decir, la lógica es la única teoría que precede a la teoría dada (véase Sección 36). Imaginemos que en todas las afirmaciones de nuestra teoría los términos primitivos son reemplazados en su totalidad por variables adecuadas (como en la Sección 37, y nuevamente por razones de simplicidad no consideramos los teoremas que contienen términos definidos). Las afirmaciones de la teoría considerada se transforman en funciones proposicionales que contienen como variables libres los símbolos que han reemplazado a los términos primitivos, y que no contienen otras constantes que las pertenecientes a la lógica. Dados ciertos

objetos, se puede determinar si satisfacen todos los axiomas de nuestra teoría, o dicho exactamente, todas las funciones proposicionales obtenidas de estos axiomas del modo recién descrito (es decir, si los nombres o designaciones de esos objetos producen proposiciones verdaderas al ser colocados en el lugar de las variables libres de las funciones proposicionales; véase Sección 2). Si esto sucede, diremos que los objetos que se consideran constituyen un MODELO o una REALIZACIÓN DEL SISTEMA DE AXIOMAS de nuestra teoría deductiva; a veces también decimos que constituyen un MODELO DE LA TEORÍA DEDUCTIVA misma. De manera bastante análoga podemos determinar si los objetos dados no solamente satisfacen al sistema de axiomas, sino también a cualquier otro sistema de afirmaciones de nuestra teoría, y si, por lo tanto, constituyen un modelo de este sistema (no se excluye la posibilidad de que el sistema consista de una sola afirmación).

Un modelo del sistema de axiomas está constituido, por ejemplo, por los objetos que son denotados por los términos primitivos de la teoría dada, puesto que suponemos que todos los axiomas son proposiciones verdaderas; este modelo satisface, naturalmente, todos los teoremas de nuestra teoría. Pero en lo que se refiere a la construcción de nuestra teoría, este modelo no ocupa ningún lugar de preferencia entre todos los demás modelos. Cuando decimos este o aquel teorema de los axiomas, no pensamos en las propiedades específicas de ese modelo, y solamente empleamos aquellas propiedades que están explícitamente enunciadas en los axiomas y que por lo tanto son poseídas por todo modelo del sistema de axiomas. En consecuencia, toda demostración de un teorema particular de nuestra teoría puede ser extendida a todo modelo del sistema de axiomas y puede ser así transformada en un argumento mucho más general, no ya perteneciente a nuestra teoría, sino a la lógica; y como resultado de esta generalización obtenemos un enunciado de lógica general (como las leyes I′ y II′ de la sección precedente) que establece el hecho de que el teorema en cuestión es satisfecho por todo modelo de nuestro sistema de axiomas. La conclusión final a que arribamos de esta manera puede ser expresada bajo la forma siguiente:

Todo teorema de una teoría deductiva dada es satisfecho por cualquier modelo del sistema de axiomas de esta teoría; y además, a

todo teorema corresponde un enunciado general que puede ser formulado y demostrado dentro del marco de la lógica y que establece el hecho de que el teorema en cuestión es satisfecho por cualquier modelo de esa naturaleza.

Tenemos aquí una ley general del dominio de la metodología de las ciencias deductivas que, cuando se formula de manera algo más precisa, se conoce bajo el nombre de LEY DE DEDUCCIÓN (o TEOREMA DE DEDUCCIÓN)[1].

La tremenda importancia práctica de esta ley resulta del hecho de que generalmente estamos en condiciones de exhibir numerosos modelos del sistema de axiomas de una teoría particular, aun sin abandonar el campo de las ciencias deductivas. A fin de llegar a un modelo tal basta seleccionar determinadas constantes de otra teoría deductiva cualquiera (que puede ser lógica o una teoría que presuponga a la lógica), colocarlas en los axiomas en lugar de los términos primitivos y demostrar que las proposiciones obtenidas de esta manera son aserciones de esta otra teoría. Decimos en este caso que hemos hallado una interpretación del sistema de axiomas de la teoría original dentro de la otra teoría. (En particular, puede ocurrir que las constantes elegidas pertenezcan a la teoría originalmente considerada, en cuyo caso algunos de los términos primitivos hasta pueden haber permanecido invariables; se dice entonces que el sistema de axiomas dado ha hallado una nueva interpretación dentro de la teoría que se considera.) También someteremos los teoremas de la teoría original a una transformación análoga, reemplazando los términos primitivos en su totalidad por las constantes que han sido empleadas en la interpretación de los axiomas. En base a la ley de deducción podemos estar entonces seguros por adelantado de que de esta manera se llega a proposiciones que son aserciones de la nueva teoría. Podemos formular esto de la manera siguiente:

Todos los teoremas demostrados sobre la base de un sistema de axiomas dado siguen siendo válidos para cualquier interpretación del sistema.

---

[1] Esta ley fue descubierta independientemente por el lógico francés J. HERBRAND (1908-1931) y el autor.

Dar una demostración especial para cualquiera de estos teoremas transformados es redundante; en todo caso sería una labor de índole puramente mecánica, pues sería suficiente trasladar el correspondiente argumento del campo de la teoría original y someterlo a las mismas transformaciones que han sido ejecutadas con respecto a los axiomas y teoremas. Toda demostración dentro de una teoría deductiva contiene, potencialmente, por decir así, una cantidad ilimitada de otras demostraciones análogas.

Los hechos descritos más arriba demuestran el gran valor del método deductivo desde el punto de vista de la economía del pensamiento humano. Son también de gran alcance en cuanto a su importancia teórica, aunque fuera solamente por el hecho de que establecen un fundamento para diversos argumentos e investigaciones dentro de la metodología de las ciencias deductivas. En particular, la ley de deducción es la base teórica para todas las así denominadas DEMOSTRACIONES POR INTERPRETACIÓN; ya hemos encontrado un ejemplo de tales demostraciones en la sección precedente, y nos encontraremos con varios otros ejemplos en la segunda parte de este libro.

Por razones de exactitud se puede agregar que las consideraciones expuestas someramente aquí son aplicables a cualquier teoría deductiva en cuya construcción esté presupuesta la lógica, mientras que su aplicación a la lógica misma origina ciertas dificultades que preferiríamos no discutir aquí. Si una teoría deductiva determinada presupone algunas otras teorías, además de la lógica, algunas de las formulaciones dadas más arriba asumen una forma algo más complicada.

La fuente común de los fenómenos metodológicos discutidos aquí es el hecho puntualizado en la sección precedente, a saber, que en la construcción de una teoría deductiva despreciamos el significado de los axiomas y tomamos en cuenta solamente su forma. Es por esta razón que al referirse a estos fenómenos se habla del CARÁCTER puramente FORMAL de las ciencias deductivas y de todos los razonamientos efectuados dentro de estas ciencias.

De tiempo en tiempo se hallan proposiciones que recalcan el carácter formal de la matemática de modo paradójico y exagera-

do; si bien son fundamentalmente correctas, estas proposiciones pueden llegar a ser una fuente de oscuridad y confusión. Es así como se oye y hasta ocasionalmente se lee que no se puede atribuir ningún contenido definido a los conceptos matemáticos; que en las matemáticas no sabemos realmente de qué estamos hablando, y que no estamos interesados en saber si nuestras aserciones son verdaderas. Tales juicios deberían ser encarados más bien críticamente. Si al construir una teoría uno se comporta como si no comprendiera el significado de los términos de esa disciplina, esto no es lo mismo que negar a esos términos todo significado. Se admite que algunas veces se desarrolla una teoría deductiva sin atribuir un significado definido a sus términos primitivos, tratando así a estos últimos como si fueran variables; en este caso decimos que tratamos a la teoría como un SISTEMA FORMAL. Pero ésta es una situación comparativamente rara (ni ha sido tomada en cuenta en nuestra caracterización general de las teorías deductivas dada en la Sección 36), y solamente ocurre cuando es posible dar varias interpretaciones al sistema de axiomas de dicha teoría, es decir, si se dispone de varias maneras de atribuir significados concretos a los términos que se presentan en la teoría, pero cuando no deseamos dar preferencia por adelantado a ninguna de esas maneras. Por otra parte, es de suponer que un sistema formal para el que no pudiéramos dar ninguna interpretación no interesaría a nadie.

Para concluir dirigiremos la atención a ciertos ejemplos interesantes de interpretaciones de disciplinas matemáticas que son mucho más importantes que los dados en la Sección 37.

El sistema de axiomas de la aritmética se puede interpretar en la geometría. Dada una recta arbitraria es posible definir relaciones entre sus puntos y operaciones con ellos que satisfagan todos los axiomas de la aritmética, y por lo tanto, todos los teoremas referentes a las correspondientes relaciones entre números y operaciones sobre ellos. (Esto está íntimamente relacionado con una circunstancia que citamos en la Sección 33, a saber, la posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y todos los números.) Recíprocamente, el sistema de axiomas de la geometría admite una interpretación en la aritmética. Estos resultados tienen múltiples aplicaciones. Por ejem-

plo, pueden emplearse configuraciones geométricas para obtener una imagen visual de varios hechos en el campo de la aritmética, procedimiento conocido con el nombre de método gráfico; por otro lado, es posible investigar hechos geométricos con la ayuda de métodos aritméticos o algebraicos —existe incluso una rama especial de la geometría, conocida como geometría analítica, que tiene como objeto las investigaciones de este tipo.

La aritmética, como ya hemos visto, puede construirse como parte de la lógica (cf. Sección 26). Pero si tratamos la aritmética como teoría deductiva independiente, basada en un sistema propio de términos primitivos y axiomas, su relación con la lógica puede describirse como sigue: la aritmética posee una interpretación dentro de la lógica (sobrentendiendo que la lógica incluye el axioma de infinitud; cf. Sección 26); en otras palabras, es posible definir dentro de la lógica conceptos tales que satisfagan todos los axiomas, y, por consiguiente, todos los teoremas, de la aritmética. Si recordamos que la geometría tiene una interpretación dentro de la aritmética, llegamos a la conclusión que la geometría puede interpretarse también dentro de la lógica. Todos estos resultados son sumamente significativos desde el punto de vista metodológico.*

39. Selección de axiomas y términos primitivos; su independencia

Discutiremos ahora algunos problemas de naturaleza un poco más especial que, sin embargo, se refieren a componentes fundamentales del método deductivo, a saber, la elección de términos primitivos y axiomas, así como la construcción de definiciones y demostraciones.

Es importante darse cuenta que tenemos gran libertad en la selección de términos primitivos y axiomas; sería completamente erróneo creer que determinadas expresiones no pueden definirse de ninguna manera, o creer en la imposibilidad fundamental de demostrar ciertos teoremas. Llamaremos EQUIVALENTES a dos sistemas de proposiciones de una teoría dada, cuando toda proposición del primer sistema pueda ser derivada de las proposiciones del segundo y de los teoremas de las teorías precedentes, y recíprocamente, toda proposición del segundo pueda derivarse de

las proposiciones del primero (si una misma proposición figura en ambos sistemas no es necesario deducirla). Imaginemos ahora que hubiésemos basado una teoría deductiva sobre un sistema determinado de axiomas y que en el transcurso de su construcción nos encontrásemos con un sistema de proposiciones que fuese equivalente al de axiomas en el sentido que se acaba de indicar. (Un ejemplo concreto de ello nos lo ofrece el fragmento de teoría de congruencia de segmentos que hemos tratado en la Sección 37; es fácil ver que el sistema de axiomas de dicha teoría es equivalente al sistema de proposiciones formado por el Axioma I y los Teoremas I y II.) Si se presentara esta situación, entonces, desde el punto de vista teórico, sería posible reconstruir la teoría de tal manera que las proposiciones del nuevo sistema se toman como axiomas, mientras que los axiomas iniciales se demuestran como teoremas. Incluso no es esencial la circunstancia que los nuevos axiomas tengan, en un principio, menor grado de evidencia, ya que toda proposición se vuelve evidente hasta cierto punto cuando ha sido derivada de una manera convincente a partir de otras proposiciones evidentes. Todo esto se aplica igualmente —*mutatis mutandis*— a los términos primitivos de una teoría deductiva; el sistema de estos términos puede reemplazarse por cualquier otro sistema de términos de la teoría en cuestión, siempre que los dos sistemas sean EQUIVALENTES en el sentido de que cada término del primer sistema pueda definirse mediante términos del segundo juntamente con términos pertenecientes a las teorías precedentes, y recíprocamente. No es por razones teóricas (o, al menos, no es solamente por estas razones) que decidimos seleccionar un cierto sistema de términos primitivos y axiomas en lugar de otros posibles sistemas equivalentes; otros factores —prácticos, didácticos, inclusive estéticos— intervienen en esta decisión. Algunas veces se trata de elegir los términos primitivos y axiomas más simples, en cuyo caso podría ser deseable usar el menor número posible; o podemos preferir términos primitivos y axiomas tales que nos permitieran, en la manera más simple, definir aquellos términos y demostrar aquellas proposiciones de una teoría dada en que estamos especialmente interesados.

En estrecha conexión con estas observaciones surge otro problema. Fundamentalmente, tratamos de obtener sistemas de axio-

mas que no contengan aserciones superfluas, esto es, aserciones que puedan derivarse de los restantes axiomas y que, por lo tanto, podrían incluirse entre los teoremas de la teoría en construcción. Un sistema de axiomas de este tipo es llamado INDEPENDIENTE (o un SISTEMA DE AXIOMAS MUTUAMENTE INDEPENDIENTES). También procuramos que el sistema de términos primitivos sea INDEPENDIENTE, esto es, que no contenga términos superfluos que puedan definirse a partir de los restantes. A menudo, sin embargo, no se insiste en estos postulados metodológicos por razones prácticas (didácticas), particularmente en aquellos casos en que la omisión de un axioma o término primitivo superfluo causaría grandes complicaciones en la construcción de la teoría.

40. Formalización de definiciones y demostraciones; teorías deductivas formalizadas

Se considera con razón el método deductivo como el más perfecto de todos los que puedan emplearse en la construcción de una ciencia. Elimina en grado sumo la posibilidad de imprecisiones y errores, sin caer por ello en un regreso infinito; gracias a su aplicación, toda duda referente al contenido de los conceptos y a la verdad de las aserciones de una teoría dada se reducen considerablemente, y a lo más pueden afectar a los pocos términos primitivos y axiomas.

Esta afirmación, sin embargo, debe tomarse con cierta reserva. La aplicación del método deductivo sólo proporcionará el resultado deseado cuando todas las definiciones y demostraciones cumplan su cometido, es decir, si las definiciones aclaran por completo el sentido de los conceptos definidos, y las demostraciones nos convencen totalmente de la validez de los teoremas a ser probados. No es fácil comprobar si ambas satisfacen efectivamente estas exigencias; por ejemplo, es muy posible que un razonamiento plenamente convincente para una persona, para otra no sea ni siquiera comprensible. Para eliminar toda duda de esta clase, la metodología actual tiende a reemplazar la valoración subjetiva en la comprobación de definiciones y demostraciones por criterios de naturaleza objetiva y a hacer depender la decisión sobre corrección de las mismas exclusivamente de su estructura, es decir,

de su forma externa. Con este propósito, se enuncian REGLAS DE DEFINICIÓN y REGLAS DE DEMOSTRACIÓN (O DE INFERENCIA). Las primeras nos dicen qué forma deben tener las proposiciones que son usadas como definiciones en la teoría en consideración, y las segundas describen el tipo de transformaciones a que pueden someterse los enunciados de esta teoría, para derivar otras proposiciones a partir de ellos; toda definición debe formularse de acuerdo con las reglas de definición, y cada demostración debe ser COMPLETA, esto es, debe consistir en una aplicación sucesiva de las reglas de demostración a proposiciones previamente reconocidas como verdaderas (cf. Secciones 11 y 15). Estos nuevos postulados metodológicos pueden designarse como postulados de FORMALIZACIÓN DE DEFINICIONES Y DEMOSTRACIONES; una disciplina construida de acuerdo con estos nuevos postulados es llamada una TEORÍA DEDUCTIVA FORMALIZADA[1].

*Mediante los postulados de formalización, el carácter formal de la matemática se acentúa considerablemente. Ya en una etapa anterior del desarrollo del método deductivo, vimos cómo en la construcción de una disciplina matemática debíamos prescindir del significado de todas las expresiones específicas de ella, y comportarnos, por consiguiente, como si en lugar de dichas expresiones apareciesen variables desprovistas de todo sentido propio. En cambio, a los conceptos lógicos podíamos atribuir su significado usual; en relación con ello podríamos tratar los axiomas y teoremas de una teoría matemática, si no como proposiciones, por lo menos como funciones proposicionales, o sea como expresiones que presentan la forma gramatical de proposiciones y expresan ciertas propiedades de objetos o relaciones entre éstos. Deducir un teorema de axiomas aceptados (o de teoremas demostrados previamente) era lo mismo que mostrar de un modo convincente que todos los objetos que satisfacen los axiomas también satisfacen el teorema en cuestión; las demostraciones matemáticas no diferían demasiado de consideraciones de la vida cotidiana. Ahora, sin embargo, debemos prescindir sin excepción de los significados

---

[1] Los primeros intentos de exponer las teorías deductivas de manera formalizada se deben a FREGE, al que ya hemos citado dos veces (cf. nota 2 en la pág. 42). En las obras del lógico polaco S. LEŚNIEWSKI (1886-1939) este proceso de formalización alcanzó muy alto nivel; una de sus contribuciones es una formulación exacta y exhaustiva de las reglas de definición.

de todas las expresiones que encontremos en la disciplina dada, y debemos proceder en la tarea de construir una teoría deductiva como si sus enunciados fueran configuraciones de signos desprovistos de todo contenido; cada demostración consistirá ahora en someter los axiomas o los teoremas previamente demostrados a una serie de transformaciones puramente externas.*

A la luz de las exigencias actuales, la lógica se vuelve la base de las ciencias matemáticas en un sentido mucho más completo que antes. Ya no podemos estar satisfechos con la convicción que —dada nuestra capacidad innata o adquirida para pensar correctamente— nuestros argumentos están de acuerdo con las reglas de la lógica. Para dar una demostración completa de un teorema es necesario realizar las transformaciones prescritas por las reglas de demostración, no sólo en las aserciones de la teoría que nos ocupa, sino también en las de la lógica (y de las otras teorías precedentes); y para ello debemos tener una lista completa de todas las leyes lógicas a nuestra disposición que se aplican en las demostraciones.

Solamente en virtud del desarrollo de la lógica deductiva estamos hoy, al menos teóricamente, en posición de presentar formalizadamente cualquier disciplina matemática. Sin embargo, en la práctica esto todavía presenta grandes complicaciones; lo que se gana en exactitud y corrección metodológica se pierde en claridad e inteligibilidad. Este problema es, después de todo, bastante nuevo; las investigaciones relevantes no han sido aún definitivamente concluidas, y hay razones para esperar que su ulterior desarrollo traiga, eventualmente, simplificaciones esenciales. Sería, por lo tanto, prematuro actualmente, en una presentación popular de cualquier parte de la matemática, satisfacer plenamente los postulados de formalización. En particular, sería poco sensato demandar que en un texto corriente de alguna disciplina matemática las demostraciones de los teoremas se den en forma completa; es de esperar, sin embargo, que el autor de un libro de texto esté intuitivamente seguro que todas sus demostraciones puedan llevarse a esa forma, y aun que desarrolle sus consideraciones a tal punto que un lector con alguna práctica en el pensamiento deductivo y con suficiente conocimiento de la lógica contemporánea, sea capaz de llenar las lagunas restantes sin mucha dificultad.

41. Consistencia y completidad de una teoría deductiva; problema de decisión

Consideraremos ahora dos conceptos metodológicos que tienen gran importancia desde el punto de vista teórico, aunque en la práctica sean de poca significación. Son éstos los conceptos de CONSISTENCIA y COMPLETIDAD.

Una teoría deductiva se dice CONSISTENTE O NO CONTRADICTORIA si ningún par de aserciones de ella se contradice, o, en otras palabras, si de todo par de enunciados contradictorios (cf. Sección 7) al menos uno no puede ser demostrado. Por otra parte, una teoría se dice COMPLETA si de todo par de enunciados contradictorios formulados exclusivamente en términos de la teoría considerada (y de teorías que la preceden), al menos uno puede ser demostrado en ella. Decimos que un enunciado puede ser REFUTADO en una teoría dada si su negación puede demostrarse en esa teoría. Usando esta terminología podemos decir que una teoría deductiva es consistente si ninguna proposición puede ser demostrada y refutada en ella; una teoría es completa, por otra parte, si toda proposición formulada en términos de esta teoría puede ser demostrada o refutada en ella. Los términos «consistente» y «completo» se aplican no sólo a la teoría misma, sino también al sistema de axiomas sobre el cual ella está basada.

Procuremos obtener ahora una idea clara de la significación de estas dos nociones. Toda disciplina, aun aquellas construidas con plena corrección en todos los aspectos metodológicos, pierde su valor ante nuestros ojos si tenemos motivos para sospechar que no todas sus aserciones son verdaderas. Por otra parte, el valor de una disciplina será tanto mayor, cuanto mayor sea el número de proposiciones verdaderas que puedan establecerse en ella. Desde este punto de vista, una disciplina puede considerarse ideal si contiene entre sus aserciones todas las proposiciones verdaderas, y ninguna falsa, que sean relevantes para ella. Una proposición es considerada relevante si está formulada completamente en términos de la disciplina considerada (y sus disciplinas precedentes); después de todo, no puede esperarse que, por ejemplo, en la aritmética puedan demostrarse todas las proposiciones verdaderas, inclusive aquellas que contienen conceptos de química o bio-

logía. Imaginemos ahora que una teoría deductiva es inconsistente, es decir, que entre sus axiomas y teoremas aparecen dos proposiciones contradictorias; usando una ley lógica bien conocida, a saber, la ley de contradicción (cf. Sección 13), se sigue que uno de estos enunciados debe ser falso. Si, por otra parte, asumimos que la teoría es incompleta, entonces existen dos proposiciones contradictorias relevantes, ninguna de las cuales puede ser demostrada en esa disciplina; sin embargo, por otra ley lógica, la ley del tercero excluido, una de las dos proposiciones debe ser verdadera. Vemos así que una teoría no realiza nuestro ideal a menos que sea consistente y completa (con esto no queremos implicar que toda disciplina consistente y completa debe, *ipso facto*, ser una realización de nuestro ideal, esto es, que debe contener entre sus aserciones a todas las proposiciones verdaderas y únicamente a ellas).

El problema que hemos estado considerando tiene aún otro aspecto. El desarrollo de toda ciencia deductiva consiste en formular en los términos de esta ciencia problemas del tipo «*¿es tal y tal el caso?*» e intentar decidirlos sobre la base de los axiomas que se han asumido. Está claro que todo problema de este tipo puede ser decidido en una de dos posibles maneras: afirmativa o negativamente. En la primera alternativa, la respuesta es: «*tal y tal es el caso*»; y en la segunda: «*tal y tal no es el caso*». La consistencia y la completidad del sistema de axiomas de una teoría deductiva nos garantizan que todo problema del tipo mencionado puede decidirse en la teoría, y además, decidirse de manera única; la consistencia excluye la posibilidad que un problema pueda decidirse de dos maneras, esto es, afirmativa o negativamente, y la completidad nos asegura que puede ser decidido en al menos una manera.

Hay un problema estrechamente relacionado con el problema de completidad, aunque más general, que concierne a teorías tanto incompletas como completas. Este problema consiste en hallar, para una teoría deductiva dada, un método general que nos permita decidir para todo enunciado particular formulado en términos de esta teoría, si éste puede o no demostrarse en ella. Este importante problema es conocido como el PROBLEMA DE DECISIÓN[1].

---

[1] La importancia de los conceptos y problemas discutidos en esta sección —y especialmente del concepto de consistencia y del problema de decisión— fue recalcada por HILBERT (cf. nota 1 en la pág. 152), quien estimuló en grado sumo muchas investiga-

Sólo conocemos un número reducido de teorías deductivas de las cuales ha sido posible demostrar que son consistentes y completas. Éstas son, por lo general, teorías elementales con una estructura lógica simple y una variedad limitada de conceptos. Como ejemplo podemos mencionar el cálculo proposicional, que ha sido discutido en el Capítulo II, siempre que éste sea considerado como una teoría independiente y no como parte de la lógica (sin embargo, al aplicar el término «completa» a esta teoría, éste es usado en un sentido ligeramente diferente). Quizá el ejemplo más interesante de una teoría consistente y completa está dado por la geometría elemental; tenemos en mente a la geometría limitada a aquellos confines dentro de los cuales fue enseñada por siglos en las escuelas como parte de la matemática elemental, es decir, una disciplina en la que se investigan las propiedades de varios tipos especiales de figuras geométricas —como ser rectas, planos, triángulos, círculos—, pero en la que no aparece el concepto general de configuración geométrica (un conjunto de puntos)[1].

La situación cambia radicalmente en cuanto pasamos a considerar ciencias tales como la aritmética o la geometría superior. Probablemente, nadie que trabaje en estas ciencias duda de su consistencia; pero a pesar de ello, como se desprende de las investigaciones metodológicas más recientes, una demostración estricta de su consistencia presenta grandes dificultades de naturaleza fundamental. La situación respecto al problema de completidad es aún peor; en efecto, la aritmética y la geometría superior son incompletas, ya que ha sido posible formular problemas de carácter puramente aritmético o geométrico que no pueden ser positiva ni negativamente decididos en esas disciplinas. Podría suponerse que este hecho es simplemente un resultado de la imperfección de los sistemas de axiomas y métodos de demostración de que disponemos actualmente, y que una modificación adecuada de éstos (por ejemplo, una extensión del sistema de axiomas)

---

ciones importantes sobre los fundamentos de la matemática. Gracias a su estímulo estos conceptos y problemas han sido últimamente el objeto de intensivas investigaciones por numerosos matemáticos y lógicos contemporáneos.

[1] La primera demostración de completidad del cálculo proposicional (y, por consiguiente, el primer resultado positivo de las investigaciones acerca de la completidad de teorías) se debe al lógico norteamericano E. L. POST (1897-1954). La demostración de completidad de la geometría elemental se debe al autor.

puede, en el futuro, llevar a sistemas completos. Sin embargo, investigaciones más profundas han mostrado que esta conjetura es errónea: nunca se logrará construir una teoría deductiva consistente y completa que contenga como teoremas a todos los enunciados verdaderos de la aritmética o de la geometría superior. Además, tampoco el problema de decisión tiene solución positiva con respecto a estas disciplinas; es imposible dar un método general que nos permita diferenciar entre aquellos enunciados que pueden ser demostrados en estas disciplinas y aquellos que no pueden ser demostrados. Todos estos resultados se extienden a muchas otras teorías deductivas, y, en particular, a todas aquellas que o bien presuponen la aritmética de los números enteros (es decir, la teoría de las cuatro operaciones aritméticas básicas sobre enteros) o que contienen recursos suficientes para desarrollar esta teoría. *Así, por ejemplo, estos resultados pueden ser aplicados a la teoría general de clases (como se sigue de las observaciones al final de la Sección 26)[1].*

En vista de estas últimas observaciones, se entiende por qué los conceptos de consistencia y completidad —a pesar de su importancia teórica— ejercen, en la práctica, poca influencia sobre la construcción de teorías deductivas.

42. Concepción ampliada de la metodología de las ciencias deductivas

Las investigaciones relativas a la consistencia y a la completidad se cuentan entre los factores más importantes que contribuyeron a la extensión considerable del dominio de los estudios metodológicos, y que causaron incluso un cambio fundamental en el carácter de la metodología de las ciencias deductivas. Aquella concepción de la metodología que fue indicada al comienzo del presente capítulo se ha hecho, durante el desarrollo histórico del tema, ya demasiado estrecha. El análisis y la valoración crítica de los métodos que se aplican en la práctica para la construcción de las ciencias deductivas, han dejado de ser el exclusivo (o aun el prin-

---

[1] Estos resultados de extraordinaria importancia se deben al lógico norteamericano contemporáneo (de origen austriaco) K. GÖDEL. Sus resultados sobre el problema de decisión fueron ampliados por el lógico norteamericano A. CHURCH.

cipal) objeto de la metodología. La metodología de las ciencias deductivas se ha transformado en una teoría general de las ciencias deductivas, así como la aritmética es la teoría de los números y la geometría es la teoría de las configuraciones geométricas. En la metodología contemporánea investigamos las teorías deductivas como totalidades, así como las proposiciones que las constituyen; consideramos los símbolos y las expresiones de que están compuestas esas proposiciones, las propiedades y los conjuntos de expresiones y proposiciones, las relaciones que rigen entre ellas (como la relación de consecuencia, por ejemplo), e incluso relaciones entre expresiones y los objetos a que se refieren dichas expresiones (tales como la relación de designación); establecemos también leyes generales relativas a estos conceptos.

*Por lo tanto, se sigue que los términos que designan expresiones que aparecen en las teorías deductivas, propiedades de esas expresiones y relaciones entre ellas, no pertenecen al dominio de la lógica, sino al de la metodología de las ciencias deductivas. Esto se aplica en particular a varios de los términos introducidos y empleados en los anteriores capítulos de este libro, tales como «*variable*», «*función proposicional*», «*cuantificador*», «*consecuencia*», y muchos otros. Para que nos aparezca más clara la diferencia entre términos lógicos y términos metodológicos, consideremos un par de palabras tales como «*o*» y «*disyunción*». La palabra «*o*» pertenece, por supuesto, a la lógica — a saber, al cálculo proposicional—, a pesar de que se usa también en toda otra ciencia, y por lo tanto, en particular, en la metodología. La palabra «*disyunción*», por otra parte, que designa proposiciones construidas con la ayuda de la palabra «*o*», es un ejemplo típico de término metodológico.

El lector quizá se sorprenda de que en capítulos relativos a la lógica empleemos tantos términos metodológicos. La explicación de esto, sin embargo, es relativamente simple. Por una parte, una cierta circunstancia desempeña aquí un papel sobre el cual ya hemos llamado la atención en la Sección 9: existe, entre los lógicos y los matemáticos, la costumbre de usar frases que contienen términos metodológicos en lugar de expresiones de carácter puramente lógico o matemático, y ello obedece a veces sólo a razones de estilo; en el presente trabajo hemos hecho cierta concesión a esta costumbre. Pero, por otra parte, un factor más

importante debemos considerar aquí: no hemos intentado en este libro construir la lógica en forma sistemática, sino que solamente hemos hablado acerca de la lógica y hemos discutido y comentado sus conceptos y sus leyes. Sabemos, sin embargo (Sección 18), que cuando se habla de expresiones lógicas deben usarse los nombres de esas expresiones; o sea términos que ya pertenecen a la metodología. Si desarrolláramos la lógica en forma de una teoría deductiva, sin hacer en absoluto ningún comentario sobre ella, entonces los términos metodológicos aparecerían solamente en la formulación de las reglas de definición y de inferencia.*

Debido a la evolución por la que ha pasado la metodología, la investigación en este campo se ha visto necesitada de aplicar métodos nuevos, más sutiles y más precisos. La metodología se ha transformado en una ciencia como las que ella misma estudia: ha asumido la forma de una disciplina deductiva. Debido a lo extenso del dominio de investigaciones, la expresión «la metodología de las ciencias deductivas» no parece ya bastante apropiada; en verdad «metodología» significa solamente «la ciencia del método». En consecuencia, esta expresión es reemplazada a menudo por otras; por ejemplo, por el nombre (no del todo feliz) de «TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN», o bien por el término (mucho mejor) de «METALÓGICA Y METAMATEMÁTICA», que significa aproximadamente lo mismo que «la ciencia de la lógica y de la matemática». Aún otro término se ha puesto en uso recientemente, «SINTAXIS Y SEMÁNTICA DE LAS CIENCIAS DEDUCTIVAS», el cual pone de manifiesto la analogía que existe entre la metodología de las ciencias deductivas y la gramática del lenguaje cotidiano[1].

---

[1] La metodología de las ciencias deductivas en su sentido ampliado es una disciplina joven. Su desarrollo intensivo comenzó solamente después del año 1920, simultáneamente (y, por lo que parece, independientemente) en dos centros distintos: en Göttingen bajo la influencia de HILBERT y P. BERNAYS, y en Varsovia, donde trabajaban LEŚNIEWSKI y LUKASIEWICZ (cf. notas 1 en la pág. 152, 1 en la pág. 166 y 2 en la pág. 42). La obra fundamental de HILBERT y BERNAYS en este dominio es *Grundlagen der Mathematik* (Berlín, 1934-1939). El aparato conceptual y los aspectos filosóficos de la nueva disciplina están discutidos en los escritos del filósofo y lógico norteamericano (de origen alemán) R. CARNAP; su primera obra en esta dirección es *Logische Syntax der Sprache* (Viena, 1934).

Ejercicios

1. El cálculo de clases que fue considerado en el Capítulo IV puede construirse como teoría deductiva separada, presuponiendo solamente el cálculo proposicional. En esta construcción consideraremos a los símbolos: «V», «Λ», «$\subset$» y a todos los signos de operaciones introducidos en la Sección 25 como términos primitivos. Adoptamos, además, los nueve axiomas siguientes[1]:

Axioma I. $K \subset K$.

Axioma II. *Si* $K \subset L$ *y* $L \subset M$, *entonces* $K \subset M$.

Axioma III. $K \cup L \subset M$ *si, y sólo si,* $K \subset M$ *y* $L \subset M$.

Axioma IV. $M \subset K \cap L$ *si, y sólo si,* $M \subset K$ *y* $M \subset L$.

Axioma V. $K \cap (L \cup M) \subset (K \cap L) \cup (K \cap M)$.

Axioma VI. $K \subset \mathsf{V}$.

Axioma VII. $\Lambda \subset K$.

Axioma VIII. $\mathsf{V} \subset K \cup K'$.

Axioma IX. $K \cap K' \subset \Lambda$.

De estos axiomas pueden deducirse varios teoremas. Demuéstrense, en particular, los teoremas siguientes (haciendo uso de las indicaciones de que van seguidos):

Teorema I. $K \cup K \subset K$.

Indicación: En el Axioma III, reemplazar «L» y «M» por «K». Nótese que el miembro derecho de la equivalencia así obtenida se satisface para cualquier clase K (Axioma I); por lo tanto, el miembro izquierdo también debe satisfacerse.

Teorema II. $K \subset K \cap K$.

---

[1] El sistema axiomático que se expondrá se debe esencialmente a Schröder (cf. nota 1 en la pág. 117). Varios sistemas axiomáticos simples para el cálculo de clases fueron publicados por el matemático norteamericano E. V. Huntington (1874-1952), autor de muchas contribuciones importantes a la fundamentación axiomática de teorías lógicas y matemáticas. Si el cálculo de clases es desarrollado como sistema formal, es decir, si no se atribuye ningún significado específico a sus términos primitivos, se le llama usualmente Álgebra de Boole, en honor a su creador G. Boole (cf. nota 1 en la pág. 42).

Indicación: La demostración es análoga a la del Teorema I, pero se basa en los Axiomas IV y I.

TEOREMA. III. $K \subset K \cup L$ *y* $L \subset K \cup L$.

Indicación: En el Axioma III, colóquese «$K \cup L$» en lugar de «M»; nótese que el miembro izquierdo de la equivalencia se satisface siempre en virtud del Axioma I.

TEOREMA IV. $K \cap L \subset K$ *y* $K \cap L \subset L$.

Indicación: Demostración análoga a la del Teorema III.

TEOREMA V. $K \cup L \subset L \cup K$.

Indicación: En el Axioma III sustitúyase «$L \cup K$» en lugar de «M», y compárese el miembro derecho de la equivalencia así obtenida con el Teorema III (donde «K» debe ser reemplazado por «L» y «L» por «K»).

TEOREMA VI. $K \cap L \subset L \cap K$.

Indicación: Demostración análoga a la del Teorema V, pero se basa en el Axioma IV y en el Teorema IV.

TEOREMA VII. *Si* $L \subset M$, *entonces* $K \cup L \subset K \cup M$.

Indicación: Suponiendo que la hipótesis del teorema se satisface, derívense las fórmulas:

$$K \subset K \cup M \quad y \quad L \subset K \cup M$$

(La primera de estas fórmulas se obtiene directamente del Teorema III, y la segunda puede deducirse de la hipótesis y del Teorema III mediante el Axioma II.) Aplíquese el Axioma III a aquellas fórmulas.

TEOREMA VIII. *Si* $L \subset M$, *entonces* $K \cap L \subset K \cap M$.

Indicación: Demostración similar a la del teorema precedente.

TEOREMA IX. $K \cap L \subset K \cap (L \cup M)$ *y* $K \cap M \subset K \cap (L \cup M)$.

Indicación: En el Teorema III, reemplácese «K» por «L» y «L» por «M»; a las fórmulas así obtenidas aplíquese el Teorema VIII.

TEOREMA X. $(K \cap L) \cup (K \cap M) \subset K \cap (L \cup M)$.

Indicación: Este teorema puede deducirse del Axioma III y del Teorema IX.

Los Axiomas III y IV, que desempeñan el papel más importante en la demostración de los teoremas precedentes, se denominan LEYES DE COMPOSICIÓN (para la adición y para la multiplicación de clases).

2. En el cálculo de clases cuya construcción fue esbozada en el ejercicio precedente, podemos introducir el signo de identidad «$=$», definiéndolo como sigue:

DEFINICIÓN I. $K = L$, *si, y sólo si,* $K \subset L$ *y* $L \subset K$.

A partir de los axiomas y de los teoremas del Ejercicio 1, así como de la definición precedente, derívense los siguientes teoremas:

TEOREMA XI. $K = K$.

Indicación: Póngase «K» en el lugar de «L» en la Definición I y aplíquese el Axioma I.

TEOREMA XII. *Si* $K = L$, *entonces* $L = K$.

Indicación: En la Definición I reemplácese «K» por «L» y «L» por «K»; compárese la proposición así obtenida con la Definición I en su formulación original.

TEOREMA XIII. *Si* $K = L$ *y* $L = M$, *entonces* $K = M$.

Indicación: Este teorema puede derivarse de la Definición I y del Axioma II.

TEOREMA XIV. $K \cup K = K$.

Indicación: En la Definición I reemplácese «K» por «$K \cup K$», y «L» por «K»; aplíquense los Teoremas I y III (colocando «K» en el lugar de «L»).

TEOREMA XV. $K \cap K = K$.

Indicación: La demostración es análoga a la del teorema precedente.

TEOREMA XVI. $K \cup L = L \cup K$.

Indicación: Por el Teorema V se tiene:

$$K \cup L \subset L \cup K \quad \text{y también} \quad L \cup K \subset K \cup L.$$

Aplíquese a estas fórmulas la Definición I.

TEOREMA XVII. $K \cap L = L \cap K$.

Indicación: Demostración similar a la del teorema anterior.

TEOREMA XVIII. $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$.

Indicación: Este teorema es una consecuencia de la Definición I, del Axioma V y del Teorema X.

TEOREMA XIX. $K \cup K' = \mathsf{V}$.

Indicación: Este teorema puede deducirse, con ayuda de la Definición I, del Axioma VI (en el cual debe reemplazarse «K» por «$K \cup K$») y del Axioma VIII.

TEOREMA XX. $K \cap K' = \Lambda$.

Indicación: Aplíquense la Definición I y los Axiomas VII y IX.

Obsevar cuáles de los axiomas o teoremas de este ejercicio y del precedente son ya conocidos del Capítulo IV (o del III). Recordar sus nombres.

3. Supongamos que en el sistema de cálculo de clases discutido en los Ejercicios 1 y 2 introducimos un nuevo símbolo «≬» que denota una cierta relación entre clases y se define como sigue:

$$K \between L \text{ si, y sólo si, ni } K \subset L \text{ ni } L \subset K \text{ ni } K \cap L = \Lambda.$$

¿Es esta relación idéntica a alguna de las relaciones definidas en la Sección 24?

Denotaremos la relación de ser disjunto entre clases por el símbolo «)(». ¿Cómo puede ser definido este símbolo en nuestro sistema de cálculo de clases?

4. Indicar algunas interpretaciones en la aritmética y en la geometría del sistema de axiomas considerado en la Sección 37.

¿Puede tomarse como modelo de este sistema de axiomas al conjunto de todos los números junto con la relación *ser menor que* entre números? ¿Es un modelo el conjunto de todas las rectas y la relación de paralelismo entre ellas?

5. En el fragmento de la geometría que hemos examinado en la Sección 37, la relación de ser más corto entre segmentos puede definirse de la manera siguiente:

Decimos que x es más corto que y (en símbolos: $x < y$) *si x e y son segmentos, y si x es congruente con un segmento que es parte de y;* en otras palabras, *si* $x \in \mathbf{S}$, $y \in \mathbf{S}$, *y si existe un z tal que* $z \in \mathbf{S}$, $z \subset y$, $z \neq y$ *y* $x \cong z$.

Distínganse en esta proposición el definiendum y el definiens; investíguese a qué disciplinas (o qué partes de la lógica, como sea el caso) pertenecen los términos con que se ha formulado el definiens. ¿Satisface esta definición los principios metodológicos generales de la Sección 36 y las reglas de definición de la Sección 11?

6. ¿Es completa la demostración del Teorema I indicada en la Sección 37 si sólo se tiene en cuenta las reglas de demostración expuestas en la Sección 15?

7. Además de los Teoremas I y II, pueden derivarse los siguientes teoremas de los axiomas de la Sección 37:

TEOREMA III. *Para elementos cualesquiera x, y, z del conjunto* **S**, *si* $x \cong y$ *y* $x \cong z$, *entonces* $y \cong z$.

TEOREMA IV. *Para elementos cualesquiera x, y, z del conjunto* **S**, *si* $x \cong y$ *e* $y \cong z$, *entonces* $z \cong x$.

TEOREMA V. *Para elementos cualesquiera x, y, z, t del conjunto* **S**, *si* $x \cong y$, $y \cong z$ *y* $z \cong t$, *entonces* $x \cong t$.

Demostrar con precisión que el sistema que consiste de los Axiomas I y II es equivalente, en el sentido establecido en la Sección 39, a cada uno de los sistemas siguientes (pudiendo admitirse cada uno de éstos, por consiguiente, como nuevo sistema de axiomas):

(a) el sistema formado por el Axioma I y los Teoremas I y II;
(b) el sistema formado por el Axioma I y el Teorema III;
(c) el sistema formado por el Axioma I y el Teorema IV;
(d) el sistema formado por el Axioma I y los Teoremas I y V.

8. Sobre el ejemplo de las observaciones hechas en la Sección 37, formular leyes generales de la teoría de relaciones que representen una generalización de los resultados obtenidos en el ejercicio precedente.

Indicación: Estas leyes pueden darse, por ejemplo, en forma de equivalencias empezando con las palabras:

para que una relación R sea reflexiva y tenga la propiedad **P** *en una clase K es necesario y suficiente que...*

9. Consideremos el sistema de proposiciones (a) del Ejercicio 7.

Indicar modelos que satisfagan

(a) las dos primeras proposiciones del sistema y no la tercera;
(b) la primera y tercera proposición y no la segunda;
(c) las dos últimas y no la primera.

En vista de la existencia de tales modelos, ¿qué puede concluirse sobre la posibilidad de derivar una cualquiera de las tres proposiciones a partir de las otras?; ¿son estas proposiciones mutuamente independientes? (cf. Secciones 37 y 39).

10. Se deplora ocasionalmente la falta de coincidencia de los distintos tratados de geometría: proposiciones tratadas en muchos de éstos como teoremas son admitidas en otros como axiomas, y por lo tanto, sin demostración, ¿están justificadas estas objeciones?

*11. En la Sección 13 hemos tratado el método de las tablas de verdad, el cual nos permite decidir, en cualquier caso particular, si una proposición dada perteneciente al cálculo proposicional es verdadera y, por lo tanto, si ella puede ser aceptada como una ley de dicho cálculo. Cuando se aplica este método, puede olvidarse completamente el significado atribuido a los símbolos «V» y «F» que aparecen en las tablas de verdad; puede decirse que este método se reduce a aplicar, en la construcción del cálculo proposicional, dos reglas, la primera de las cuales es análoga a las reglas de definición, y la segunda es análoga a las reglas de demostración. De acuerdo con la primera regla, si deseamos introducir en el cálculo proposicional un término constante, debemos empezar por construir la tabla de verdad fundamental para la función proposicional más simple (y al mismo tiempo la más general) que contenga a ese término. De acuerdo con la segunda regla, si deseamos aceptar una proposición (que contenga solamente aquellas constantes para las cuales ya se han construido las tablas de verdad fundamentales) como ley del cálculo proposicional, debemos construir la tabla de verdad derivada para esta proposición y verificar que el símbolo «F» no aparece ninguna vez en la última columna de dicha tabla.

Si se construye el cálculo proposicional valiéndose exclusivamente de estas dos reglas, dicho cálculo asume un carácter similar al de las teorías deductivas formalizadas. Justifíquese esta

afirmación tomando como base las consideraciones de la Sección 40. Nótense, sin embargo, algunas diferencias entre este método de construcción del cálculo proposicional y los principios generales discutidos en la Sección 36 relativos a la construcción de las teorías deductivas. Con el método que estamos considerando, ¿es posible distinguir los términos primitivos de los definidos en el cálculo proposicional? ¿Qué otra distinción se pierde aquí?

*12. Con la aplicación del método de las tablas de verdad tal como se lo expuso en el ejercicio precedente, podemos introducir en el cálculo proposicional nuevos términos que no fueron discutidos en el Capítulo II. Podemos, por ejemplo, introducir el símbolo «Δ», considerando la función proposicional:

$$p \Delta q$$

como abreviatura de la expresión:

ni p ni q.

Constrúyase la tabla de verdad fundamental para esta función, la cual debe concordar con el significado intuitivo adscrito al símbolo «Δ», y luego verifíquese, con ayuda de las tablas de verdad derivadas, que las siguientes proposiciones son verdaderas y pueden ser aceptadas como leyes del cálculo proposicional:

$$\sim p \leftrightarrow (p \Delta p),$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow [(p \Delta q) \Delta (p \Delta q)],$$
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \{ [(p \Delta p) \Delta q] \Delta [(p \Delta p) \Delta q] \}.$$

*13. Existe un método para construir el cálculo proposicional como teoría deductiva formalizada, diferente del que se expuso en el Ejercicio 11 y que concuerda enteramente con todos los principios presentados en las Secciones 36 y 40[1]. Podemos, por ejemplo, adoptar los símbolos «$\rightarrow$», «$\leftrightarrow$» y «$\sim$» (cf. Sección 13) como términos primitivos, y las siete proposiciones siguientes como axiomas del cálculo proposicional:

[1] Este método tiene su origen en FREGE (cf. nota 2 en la pág. 42).

AXIOMA I. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

AXIOMA II. $[p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$

AXIOMA III. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

AXIOMA IV. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

AXIOMA V. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

AXIOMA VI. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)]$

AXIOMA VII. $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Además, convenimos en aplicar en las demostraciones dos reglas de inferencia con las cuales ya estamos familiarizados, a saber, las reglas de sustitución y de separación. (Para poder formular con exactitud estas reglas, y en especial la de sustitución, deberíamos establecer cómo han de usarse los paréntesis y especificar qué expresiones deben considerarse en nuestro cálculo como funciones proposicionales y pueden, en consecuencia, ser sustituidas por variables; esto no presenta gran dificultad.)

Con ayuda de estas reglas de inferencia, estamos ahora en condiciones de deducir varios teoremas a partir de nuestros axiomas. Dense, en particular, las demostraciones completas de los siguientes teoremas (haciendo uso de las indicaciones que los siguen).

TEOREMA I. $p \rightarrow p$

Indicación: Sustitúyase «p» por «q» en los Axiomas I y II; nótese que la primera proposición así obtenida coincide con el antecedente de la segunda, y de acuerdo con ello aplíquese la regla de separación.

TEOREMA II. $p \rightarrow \{(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]\}$

Indicación: En el Axioma I reemplácese «q» por «$(p \rightarrow q)$»; en el Axioma III reemplácense «p», «q» y «r» por «$(p \rightarrow q)$», «p» y «q», respectivamente. Nótese que el consecuente de la primera implicación así obtenida coincide con el antecedente de la segunda. Ahora reemplácese, en el Axioma III, «q» por el antecedente de la segunda implicación y «r» por su consecuente (dejando

invariable «p», que es el antecedente, de la primera implicación). Luego aplíquese dos veces la regla de separación. Esta demostración es un ejemplo típico de razonamiento basado en el Axioma III, el cual es otra forma de la ley del silogismo hipotético (cf. Sección 12).

TEOREMA III. $p \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]$

Indicación: La demostración es análoga a la del Teorema II. Del Axioma II derívese, por sustitución, la proposición:

$$\{ (p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q] \} \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q].$$

Compárese el antecedente de esta proposición con el consecuente del Teorema II; de acuerdo con esto, hágase una sustitución conveniente en el Axioma III y aplíquese dos veces la regla de separación.

TEOREMA IV. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Indicación: Del Axioma III derívese, por sustitución, la proposición:

(1) $$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow \{ [(q \rightarrow r) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r) \}.$$

Además reemplácense, en el Axioma III, «p», «q» y «r» por «q», «$[(q \rightarrow r) \rightarrow r]$» y «$(p \rightarrow r)$», respectivamente. Nótese que el antecedente de la implicación así obtenida puede también obtenerse por sustitución a partir del Teorema III. Realícese esta sustitución y, por medio de la regla de separación, obténgase:

(2) $$\{ [(q \rightarrow r) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r) \} \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)].$$

Nótese ahora que el consecuente de (1) es igual al antecedente de (2); y, de acuerdo con esto, procédase como en la demostración del Teorema II (aplicando nuevamente el Axioma III). El Teorema IV se llama LEY DE CONMUTACIÓN.

TEOREMA V. $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Indicación: Del Axioma I derívese por sustitución:

$$\sim p \to (\sim q \to \sim p).$$

Nótese que el consecuente de esta proposición coincide con el antecedente de uno de los axiomas; y luego procédase como en la demostración del Teorema II.

Teorema VI. $p \to (\sim p \to q)$

Indicación: Hágase en el Teorema IV una sustitución tal que el antecedente de la implicación que resulte sea el Teorema V, y luego aplíquese la regla de separación. Tenemos aquí un ejemplo típico de razonamiento basado en la ley de conmutación.

Teorema VII. $\sim \sim p \to (q \to p)$

Indicación: La demostración es análoga a la del Teorema II. Del Teorema V y del Axioma VII derívense las proposiciones:

$$\sim \sim p \to (\sim p \to \sim q) \quad \text{y} \quad (\sim p \to \sim q) \to (q \to p).$$

Compárense los antecedentes y los consecuentes de estas proposiciones.

Teorema VIII. $\sim \sim p \to p.$

Indicación: Razónese como en la demostración del Teorema VI; derívese primero, de los Teoremas IV y VII, la proposición:

$$q \to (\sim \sim p \to p).$$

En esta proposición colóquese cualquiera de nuestros axiomas en el lugar de «q», y aplíquese la regla de separación.

Teorema IX. $p \to \sim \sim p$

Indicación: Realícense sustituciones convenientes en el Axioma VII y en el Teorema VIII de modo tal que pueda aplicarse la regla de separación.

TEOREMA X. $\sim \sim p \leftrightarrow p$

Indicación: Este teorema puede obtenerse del Axioma VI y de los Teoremas VIII y IX haciendo una sustitución en el Axioma VI y aplicando dos veces la regla de separación.

*14. Para introducir términos definidos en el sistema de cálculo proposicional expuesto en el ejercicio precedente, debemos aceptar una regla de definición. De acuerdo con esta regla (véase Sección 11), toda definición tiene la forma de una equivalencia. El definiendum es una expresión que contiene, además de variables proposicionales, sólo una constante, a saber, el término que se desea definir; ningún símbolo debe aparecer dos veces en esta expresión. El definiens es una función proposicional arbitraria que contiene exactamente las mismas variables que el definiendum, y que no contiene más constantes que los términos primitivos o los previamente definidos. Así, por ejemplo, podemos aceptar las siguientes definiciones para los símbolos «$\vee$» y «$\wedge$»:

DEFINICIÓN I. $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

DEFINICIÓN II. $(p \wedge q) \rightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$

De las anteriores definiciones y de los axiomas y los teoremas del Ejercicio 13, deducir los siguientes teoremas con ayuda de las reglas de sustitución y de separación:

TEOREMA XI. $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$

Indicación: En el Axioma V sustitúyase «p» por «$(p \vee q)$» y «q» por «$(\sim p \rightarrow q)$», compárese la proposición así obtenida con la Definición I y aplíquese la regla de separación.

TEOREMA XII. $p \vee \sim p$

Indicación: Este teorema puede deducirse de los Teoremas XI y I mediante dos aplicaciones de la regla de sustitución y una de la regla de separación.

TEOREMA XIII. $p \rightarrow (p \vee q)$

Indicación: La demostración de basa en el Axioma III y en los Teoremas VI y XI, y es muy similar a la del Teorema II (la regla de sustitución se aplica al Axioma III únicamente).

TEOREMA XIV. $(p \land q) \rightarrow \sim (\sim p \lor \sim q)$

Indicación: La demostración, que se basa en el Axioma IV y en la Definición II, es análoga a la del Teorema XI.

TEOREMA XV. $\sim \sim(p \land q) \rightarrow \sim (\sim p \lor \sim q)$

Indicación: La demostración se basa en el Axioma III y en los Teoremas VIII y XIV, y es similar a la del Teorema II. En el Teorema VIII reemplácese «p» por «$(p \land q)$» y compárese el consecuente de la implicación así obtenida con el antecedente del Teorema XIV.

TEOREMA XVI. $(\sim p \lor \sim q) \rightarrow \sim (p \land q)$

Indicación: Hágase en el Axioma VII una sustitución tal que el antecedente de la implicación que resulte sea el Teorema XV.

TEOREMA XVII. $\sim p \rightarrow \sim (p \land q)$

Indicación: Esta demostración es también análoga a la del Teorema II. En el Teorema XIII sustitúyase «p» por «$\sim p$» y «q» por «$\sim q$»; compárese la proposición resultante con el Teorema XVI.

TEOREMA XVIII. $(p \land q) \rightarrow p$

Indicación: Dedúzcase este teorema del Axioma VII y del Teorema XVII.

Nótese cuáles de los axiomas y los teoremas de este ejercicio y del precedente nos son familiares desde que estudiamos el Capítulo II, y recuérdense sus nombres.

*15. Formular una definición del símbolo «Δ» (véase Ejercicio 12) de acuerdo con la regla de definición establecida en el

ejercicio precedente; en el definiens deben aparecer dos constantes: «∼» y «∧».

*16. Verificar, por el método de las tablas de verdad, que todos los axiomas y las definiciones dados en los Ejercicios 13 y 14 (y también la definición propuesta en el Ejercicio 15) son proposiciones verdaderas. Trátese de deducir de esto que todos los teoremas derivables de los axiomas y las definiciones mencionados por aplicación de las reglas de sustitución y de separación, deben resultar también proposiciones verdaderas si se los investiga con el método de las tablas de verdad.

(Es posible mostrar también que, recíprocamente, toda proposición del cálculo proposicional cuya verdad pueda verificarse por el método de las tablas de verdad es, o bien uno de los axiomas o de las definiciones, o es derivable de ellos por medio de nuestras reglas de inferencia —con lo cual se demostraría, consecuentemente, que los dos métodos de construcción del cálculo proposicional discutidos en el Ejercicio 11 por una parte y en los Ejercicios 13-14 por la otra, son completamente equivalentes. Pero esta tarea es mucho más dificultosa.)

*17. Uno de los métodos de construir el cálculo proposicional discutido en los Ejercicios 11 y 13-14 da una solución inmediata del problema de decisión (cf. Sección 41) de este cálculo, y nos permite demostrar muy fácilmente que el cálculo proposicional es una teoría deductiva consistente. ¿Cuál es este método y cómo puede ser probada nuestra afirmación?

*18. Una de las leyes del cálculo proposicional dice:

para p y q arbitrarios, si p y no p, entonces q.

Sobre la base de esta ley lógica, establézcase la siguiente ley metodológica:

Si el sistema de axiomas de cualquier teoría deductiva que presupone el cálculo proposicional es inconsistente, entonces toda proposición formulada en términos de esta teoría puede ser derivada de ese sistema de axiomas.

*19. Se sabe que la siguiente ley metodológica es válida:

Si el sistema de axiomas de una teoría deductiva es completo, y si se agrega al sistema una proposición cualquiera formulada en términos de esta teoría pero no demostrable en ella, entonces el sistema de axiomas extendido de esta manera es inconsistente.

¿Por qué?

*20. Señálense todos aquellos términos que se presentan en el Capítulo II y que, de acuerdo a las observaciones hechas en la Sección 42, pertenecen al dominio de la metodología de las ciencias deductivas.

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES DE LA LÓGICA Y DE LA METODOLOGÍA A LA CONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS MATEMÁTICAS

VII

CONSTRUCCIÓN DE UNA TEORÍA MATEMÁTICA: LEYES SOBRE LA ORDENACIÓN DE NÚMEROS

43. Términos primitivos de la teoría en construcción; axiomas sobre las relaciones fundamentales entre números

Como ya disponemos de ciertos conocimientos de lógica y de metodología, intentaremos ahora la fundamentación de una teoría matemática particular, muy elemental por lo demás; esto será para nosotros una buena ocasión para consolidar, profundizar, e incluso ampliar, los conocimientos que acabamos de adquirir.

La teoría con que nos vamos a ocupar, constituye un fragmento de la aritmética de los números reales y contiene proposiciones referentes a las relaciones fundamentales entre ellos: las de *mayor que* y *menor que*, así como las operaciones más sencillas con números: la adición y la sustracción. Esta teoría presupone exclusivamente la lógica.

Tomaremos como términos primitivos los cuatro siguientes:

número real,
ser menor que,
ser mayor que,
suma.

En lugar de «*número real*», diremos simplemente «*número*» como hasta aquí. En lugar de la expresión «*números*», es más conveniente emplear la expresión «*conjunto de todos los números*», que por abreviar sustituiremos por el símbolo «N»; para expresar, pues, que x es un número, escribiremos:

$$x \in \mathbf{N}.$$

Podríamos estipular, por otra parte, que el universo de discurso de nuestra teoría consista únicamente de números reales y que variables tales como «x», «y», ..., estén exclusivamente en lugar de nombres de números; en tal caso, el término «*número real*» sería innecesario en la formulación de los enunciados de nuestra teoría, y cuando fuera necesario, el símbolo «N» podría ser reemplazado por «V» (cf. Sección 23).

Las expresiones «*es mayor que*» y «*es menor que*» serán tratadas como entidades que consisten de una sola palabra; se reemplazarán, respectivamente, por los símbolos «$>$» y «$<$». En vez de «*no es mayor que*» y «*no es menor que*» usaremos los símbolos corrientes «$\ngtr$» y «$\nless$». Además, en vez de «*la suma de los números (sumandos) x e y*» o de «*el resultado de la adición de los números x e y*», escribiremos como de costumbre:

$$x + y.$$

Con lo cual, el símbolo «N» designará un cierto conjunto, los símbolos «$<$» y «$>$», determinadas relaciones binarias, y finalmente, el símbolo «$+$», una operación binaria.

Entre los axiomas de la disciplina considerada podemos destacar dos grupos: los axiomas del primero expresan propiedades fundamentales de las relaciones *menor que* y *mayor que* y los del segundo se refieren principalmente a la adición. Veamos por ahora los axiomas del primer grupo; son en total cinco:

Axioma 1. *Para números cualesquiera x e y* (es decir, *para elementos cualesquiera del conjunto* N), *vale:* $x = y$ o $x < y$ o $x > y$.

AXIOMA 2. *Si* $x < y$, *entonces* $y \not< x$.

AXIOMA 3. *Si* $x > y$, *entonces* $y \not> x$.

AXIOMA 4. *Si* $x < y$ *e* $y < z$, *entonces* $x < z$.

AXIOMA 5. *Si* $x > y$ *e* $y > z$, *entonces* $x > z$.

Los axiomas expuestos, como igualmente todos los teoremas de carácter universal de la aritmética que afirman que números arbitrarios x, y, ... satisfacen esta o aquella propiedad, deberían comenzar en realidad con las palabras «*para números cualesquiera* x, y, ...» o «*para elementos cualesquiera* x, y, ... *del conjunto* **N**» o, simplemente, «*para* x, y, ... *cualesquiera*» (si estipulamos que las variables «x», «y», ... denotan únicamente números). Como deseamos adaptarnos a la costumbre referida en la Sección 3, prescindiremos de estas frases muy a menudo, agregándolas, sin embargo, mentalmente; esto afecta tanto a los axiomas como a los teoremas y definiciones que aparecen en el transcurso de nuestras consideraciones. Por ejemplo, el Axioma 2 deberá leerse del modo siguiente:

Para x *e* y *cualesquiera* (o *para elementos cualesquiera* x *e* y *del conjunto* **N**), *si* $x < y$, *entonces* $y \not< x$.

El Axioma 1 recibe el nombre de LEY DÉBIL DE TRICOTOMÍA (la ley fuerte de tricotomía será introducida más adelante). Mediante los Axiomas 2-5 se expresa que las relaciones *mayor que* y *menor que* son asimétricas y transitivas en el conjunto **N** (cf. Sección 29); de acuerdo con ello las llamaremos LEYES DE ASIMETRÍA y DE TRANSITIVIDAD para las relaciones *mayor que* y *menor que*. Los axiomas del primer grupo y los teoremas deducidos de ellos se denominan, en su totalidad, LEYES SOBRE LA ORDENACIÓN DE NÚMEROS.

Las relaciones $<$ y $>$, junto a la relación lógica de identidad $=$, serán referidas aquí como RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE NÚMEROS.

44. Leyes de irreflexividad para las relaciones fundamentales. Demostraciones indirectas

De los axiomas admitidos, deduciremos ahora una serie de teoremas; como ni en éste ni en el capítulo siguiente se persigue una exposición sistemática, solamente expondremos aquellos que puedan servirnos para aclarar ciertos conceptos y resultados de lógica y metodología.

TEOREMA 1. *Ningún número es menor que sí mismo:* $x \nless x$.

DEMOSTRACIÓN: Admitamos que nuestro teorema fuese falso; habría entonces un número x que satisfaría a la fórmula siguiente:

(1) $$x < x.$$

El Axioma 2 se refiere a números arbitrarios x e y (que no tienen por qué ser distintos) y seguirá siendo válido, por lo tanto, aun cuando en el lugar de «y» se inserte la variable «x»; obtendríamos con ello:

(2) $$\textit{si } x < x, \textit{ entonces } x \nless x.$$

De (1) y (2) resulta inmediatamente:

$$x \nless x;$$

esta consecuencia está en contradicción evidente con la fórmula (1). Debemos, pues, rechazar la suposición inicial y reconocer el teorema como demostrado.

Mostraremos ahora cómo transformar este argumento en una demostración completa, usando, por razones de claridad, el simbolismo lógico (cf. Secciones 13 y 15). Nos apoyaremos para ello en la ley del cálculo proposicional llamada LEY DE REDUCTIO AD ABSURDUM:

(I) $$(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$$ [1]

Usamos además el Axioma 2 en la siguiente forma simbólica:

(II) $$(x < y) \rightarrow \sim (y < x)$$

La demostración se basará exclusivamente en las dos proposiciones (I) y (II). En primer lugar, aplicaremos a (I) la regla de sustitución, reemplazando «p» por «$(x < x)$»:

(III) $$[(x < x) \rightarrow \sim (x < x)] \rightarrow \sim (x < x)$$

A continuación aplicaremos la regla de sustitución a la proposición (II) reemplazando en ella «y» por «x»:

(IV) $$(x < x) \rightarrow \sim (x < x)$$

Finalmente, comprobamos que la proposición (IV) es la hipótesis de la proposición condicional (III); podemos aplicar a ambas la regla de separación, por consiguiente, y llegar de esta manera a la fórmula:

(V) $$\sim (x < x)$$

que es precisamente la forma simbólica del teorema que queríamos demostrar.

La demostración del Teorema 1 representa un caso de las llamadas DEMOSTRACIONES INDIRECTAS, o también DEMOSTRACIONES POR REDUCTIO AD ABSURDUM. Pueden caracterizarse, en general, de la manera siguiente: para demostrar un teorema admitimos primeramente que el teorema fuese falso, y se deducen de ello ciertas consecuencias que nos obligan a rechazar la suposición inicial. Las demostraciones indirectas están muy extendidas en la matemática; pero no hay por qué suponer que caigan todas bajo

---

[1] Esta ley, junto a otra relacionada que recibe el mismo nombre:

$$(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p,$$

ha sido usada en muchos argumentos intrincados e históricamente importantes en lógica y matemática. El lógico y matemático italiano G. VAILATI (1863-1909) dedicó a su historia una monografía especial.

le esquema de la demostración del Teorema 1; más bien nos hemos enfrentado aquí con una forma de demostración indirecta relativamente rara. Más adelante encontraremos ejemplos mucho más típicos de demostraciones de esta índole.

El sistema de axiomas que hemos adoptado es completamente simétrico respecto de los símbolos «$<$» y «$>$». Por tal motivo, de todo teorema referente a la relación *menor que* inferimos automáticamente otro referente a la relación *mayor que;* las demostraciones de ambos serán completamente análogas, así que podremos prescindir en absoluto de la del segundo. En particular, al Teorema 1 corresponderá el siguiente:

TEOREMA 2. *Ningún número es mayor que sí mismo:* $x \not> x$.

Mientras que la relación de identidad $=$, como sabemos por lógica, es reflexiva, los Teoremas 1 y 2 muestran que las otras dos relaciones fundamentales entre números, $<$ y $>$, son irreflexivas; estos teoremas son llamados, por lo tanto, LEYES DE IRREFLEXIVIDAD (para las relaciones *menor que* y *mayor que*).

45. Otros teoremas sobre las relaciones fundamentales

Estableceremos a continuación el teorema siguiente:

TEOREMA 3. $x > y$ *si, y sólo si,* $y < x$.

DEMOSTRACIÓN. Debemos mostrar que las fórmulas:

$$x > y \quad \text{e} \quad y < x$$

son equivalentes, o sea que se puede deducir la primera de la segunda y recíprocamente (véase Sección 10).

Supondremos primero que

(1) $$y < x.$$

Según el Axioma 1, siempre debe ocurrir al menos uno de los tres casos:

(2) $$x = y, \quad x < y, \quad \text{o} \quad x > y.$$

Si fuese $x = y$, en virtud de la ley fundamental de la teoría de la identidad, o sea de la ley de LEIBNIZ (cf. Sección 17), en la fórmula (1) podríamos sustituir la variable «x» por «y»; obtendríamos entonces:

$$y < y,$$

en evidente contradicción con el Teorema 1. Será, pues:

(3) $$x \neq y.$$

Ahora bien, también es válido:

(4) $$x \nless y,$$

pues, según el Axioma 2, las fórmulas:

$$x < y \quad \text{e} \quad y < x$$

no pueden ser válidas simultáneamente. De acuerdo con (2), (3) y (4), debemos admitir que se da el tercer caso:

(5) $$x > y.$$

Con lo cual hemos demostrado que la fórmula (5) se deduce de la fórmula (1); análogamente se puede establecer la implicación en sentido opuesto. Ambas son, pues, efectivamente equivalentes, c.q.d. [1]

El Teorema 3 establece que las relaciones $<$ y $>$ son recíprocas (cf. Sección 28).

TEOREMA 4. *Si* $x \neq y$, *entonces* $x < y$ *o* $y < x$.

DEMOSTRACIÓN. Como

$$x \neq y,$$

[1] Las letras «c.q.d.» son la abreviación usual de la expresión «como queríamos demostrar».

según el Axioma 1 tenemos:

$$x < y \quad \text{o} \quad x > y;$$

de la segunda de estas fórmulas se deduce, de acuerdo con el Teorema 3:

$$y < x.$$

Tenemos, pues:

$$x < y \quad \text{o} \quad y < x, \qquad \text{c.q.d.}$$

Del mismo modo se puede demostrar el:

TEOREMA 5. *Si* $x \neq y$, *entonces* $x > y$ *o* $y > x$.

Los Teoremas 4 y 5 se denominan LEYES DE CONEXIÓN para las relaciones *menor que* y *mayor que*, y expresan que ambas relaciones son conexas. Los Axiomas 2-5, junto a los Teoremas 4 y 5, ponen de manifiesto que el conjunto **N** de números queda ordenado por la relación $<$ así como por $>$.

TEOREMA 6. *Dos números cualesquiera* x *e* y *satisfacen una, y sólo una, de las tres fórmulas:* $x = y$, $x < y$, *o* $x > y$.

DEMOSTRACIÓN. Del Axioma 1 se desprende que una al menos de las fórmulas indicadas debe satisfacerse. Para demostrar que las fórmulas:

$$x = y \quad \text{y} \quad x < y$$

se excluyen, procederemos como en la demostración del Teorema 3: sustituiremos en la segunda de ellas «x» por «y» y así llegaremos a una contradicción con el Teorema 1. De una manera análoga mostraríamos la incompatibilidad de las fórmulas:

$$x = y \quad \text{y} \quad x > y.$$

Finalmente, tampoco pueden las fórmulas:

$$x < y \quad \text{y} \quad x > y$$

valer simultáneamente, pues en virtud del Teorema 3, tendríamos entonces:

$$x < y \quad \text{e} \quad y < x,$$

lo que contradice al Axioma 2. De este modo, dos números cualesquiera satisfarán a una, y sólo a una, de las fórmulas consideradas, c.q.d.

Llamamos al Teorema 6, LEY FUERTE DE TRICOTOMÍA, o simplemente LEY DE TRICOTOMÍA. Con ayuda de la frase «*o bien*..., *o bien*...», en el sentido propuesto en la Sección 7, éste puede formularse abreviadamente como sigue:

Para números cualesquiera x e y valdrá, o bien $x = y$, o bien $x < y$, o bien $x > y$.

46. Otras relaciones entre números

Además de las relaciones fundamentales, todavía hay otras relaciones en la aritmética que desempeñan un papel muy importante: la relación, que ya conocíamos, de desigualdad $\neq$ y las relaciones $\leqslant$ y $\geqslant$, de que hablaremos ahora.

El significado del símbolo «$\leqslant$» se explica por la definición siguiente:

DEFINICIÓN 1. *Decimos que $x \leqslant y$ si, y sólo si, $x = y$ o $x < y$.*

La fórmula:

$$x \leqslant y$$

deberá leerse: «*x es menor o igual que y*» o «*x es a lo sumo igual a y*».

Aunque el contenido de las definiciones indicadas parece estar claro, la experiencia muestra, sin embargo, que su aplicación práctica es el origen de algunas confusiones. Algunas personas creen haber entendido perfectamente el sentido del símbolo «$\leqslant$», y a pesar de ello se resisten a aplicarlo a números determinados. No solamente rechazan como falsa la fórmula:

$$1 \leqslant 0,$$

por ejemplo —en este caso con razón—, sino que consideran también carentes de sentido, incluso falsas, fórmulas como:

$$0 \leqslant 0 \quad \text{o} \quad 0 \leqslant 1;$$

manteniendo que no tiene sentido decir que $0 \leqslant 0$ o que $0 \leqslant 1$, ya que se sabe que $0 = 0$ y $0 < 1$. En otras palabras, no es posible mostrar ningún par de números que, en su opinión, satisfaga la fórmula:

$$x \leqslant y.$$

Esta opinión es obviamente falsa. Precisamente por ser $0 < 1$, se sigue que la proposición:

$$0 = 1 \quad \text{o} \quad 0 < 1$$

es verdadera, pues la disyunción de dos proposiciones es verdadera siempre que lo sea una de ellas (cf. Sección 7); pero, de acuerdo con la Definición 1, dicha disyunción es equivalente a la fórmula:

$$0 \leqslant 1.$$

Por el mismo motivo es también verdadera la fórmula:

$$0 \leqslant 0.$$

El origen de estos malentendidos hay que buscarlo, presumiblemente, en ciertos hábitos de la vida cotidiana (*sobre los que ya hemos llamado la atención al final de la Sección 7*). En el lenguaje corriente es usual afirmar la disyunción de dos proposiciones sólo si sabemos que una de ellas es verdadera sin saber cual. No se nos ocurre decir que $0 = 1$ o $0 < 1$, aunque esto es indudablemente verdadero, ya que podemos decir algo más simple que es al mismo tiempo lógicamente más fuerte, a saber, que $0 < 1$. Sin embargo, en consideraciones matemáticas no es siempre ventajoso enunciar todo lo que conocemos en su forma más fuerte. Por ejemplo, afirmamos muchas veces que un cuadrilátero dado es un paralelogramo, aun cuando sabemos que dicho cuadrilátero es un cuadrado, y hacemos esto siempre que quere-

mos hacer uso de un teorema general referente a paralelogramos arbitrarios. Por la misma razón puede ocurrir que sepamos que un número x sea menor que 1 (por ejemplo, el número 0), y a pesar de ello solamente afirmemos que $x \leqslant 1$, es decir, que $x = 1$ o $x < 1$.

Indicaremos aquí dos teoremas referentes a la relación $\leqslant$.

TEOREMA 7. *$x \leqslant y$ si, y sólo si, $x \not> y$.*

DEMOSTRACIÓN. Este teorema se deduce inmediatamente del Teorema 6, o sea de la ley de tricotomía. En efecto, si es

(1) $$x \leqslant y,$$

y, por consiguiente, según la Definición 1,

(2) $$x = y \quad \text{o} \quad x < y,$$

entonces, la fórmula:

$$x > y$$

no podrá ser válida. Recíprocamente, si

(3) $$x \not> y,$$

deberá ser válida la fórmula (2) y nuevamente, según la Definición 1, valdrá también la fórmula (1). Con ello, las fórmulas (1) y (3) serán equivalente, c.q.d.

En la terminología de la Sección 28, el Teorema 7 afirma que la relación $\leqslant$ es la negación de la relación $>$.

Por su estructura, el Teorema 7 podría tomarse como definición del símbolo «$\leqslant$», definición diferente de la original, aunque equivalente a ella. El enunciado de este teorema puede también contribuir a disipar definitivamente toda duda sobre el uso del símbolo «$\leqslant$», ya que nadie dudará de la verdad de fórmulas como:

$$0 \leqslant 0 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant 1,$$

pues la primera de ellas es equivalente a la fórmula:

$$0 \not> 0$$

y la segunda, a la fórmula:

$$0 \not> 1.$$

Si deseamos podemos evitar el uso del símbolo «$\leqslant$», usando siempre en su lugar «$\not>$».

Teorema 8. *$x < y$ si, y sólo si, $x \leqslant y$ y $x \neq y$.*

Demostración. Si

(1) $$x < y,$$

entonces, según la Definición 1,

(2) $$x \leqslant y,$$

y además, teniendo en cuenta el teorema de tricotomía, no podrá ser válida la fórmula:

$$x = y.$$

Recíprocamente, si es válida la fórmula (2), en virtud de la Definición 1 valdrá:

(3) $$x < y \quad o \quad x = y;$$

pero si, al mismo tiempo, tenemos:

$$x \neq y,$$

deberemos reconocer como válida la primera parte de la disyunción (3), es decir, la fórmula (1). La implicación vale, por lo tanto, en ambos sentidos, c.q.d.

Pasaremos por alto algunos otros teoremas que afectan también a la relación $\leqslant$, en particular, teoremas según los cuales

dicha relación es reflexiva y transitiva; por lo demás, la demostración de éstos no ofrece la menor dificultad.

La definición del símbolo «$\geqslant$» es completamente análoga a la Definición 1; de los teoremas relativos a la relación $\leqslant$, se obtienen automáticamente teoremas relativos a la relación $\geqslant$ si se sustituyen los símbolos «$\leqslant$», «$<$» y «$>$» por «$\geqslant$», «$>$» y «$<$», respectivamente.

Las fórmulas del tipo:

$$x = y,$$

en las que en lugar de «x» e «y» aparezcan constantes, variables, o expresiones compuestas que designen números, se denominarán ECUACIONES, como de ordinario; análogamente, llamaremos DESIGUALDADES (EN SENTIDO ESTRICTO) a fórmulas como:

$$x < y \quad \text{o} \quad x > y,$$

respectivamente; en las DESIGUALDADES EN SENTIDO AMPLIO incluimos fórmulas de la forma:

$$x \neq y, \quad x \leqslant y, \quad \text{o} \quad x \geqslant y.$$

Las expresiones que aparezcan en estas fórmulas a la izquierda o a la derecha de los símbolos «$=$», «$<$», etc., recibirán los nombres de MIEMBROS IZQUIERDOS O DERECHOS DE LA ECUACIÓN O DE LA DESIGUALDAD, respectivamente.

Ejercicios

1. Consideremos las dos relaciones entre personas: la de ser de mayor estatura que y la de ser de menor estatura que. ¿Qué condición debe cumplir un conjunto de personas para constituir un modelo para el primer grupo de axiomas, junto a las citadas relaciones? (cf. Sección 37).

2. Convengamos en que la fórmula:

$$x <\cdot y$$

exprese que los números x e y satisfacen a una de las dos condiciones siguientes: (i) el valor absoluto de x es menor que el valor absoluto de y, o (ii) los valores absolutos de ambos números son iguales, pero siendo el número x negativo e y positivo; atribuyamos, análogamente, a la fórmula:

$$x \cdot> y$$

el mismo significado que a la fórmula:

$$y <\cdot x.$$

Basándose en la aritmética, mostrar que el conjunto de todos los números y las relaciones $<\cdot$ y $\cdot>$ así definidas, constituyen un modelo para el primer grupo de axiomas.

Indicar ejemplos de otras interpretaciones de estos axiomas en la aritmética y en la geometría.

3. Del Teorema 1, dedúzcase la proposición:

si $x < y$, entonces $x \neq y$.

Recíprocamente, dedúzcase el Teorema 1 del teorema expuesto, sin valerse de otros teoremas de la aritmética. ¿Son indirectas ambas demostraciones? ¿Caen bajo el esquema de la demostración del Teorema 1 de la Sección 44?

4. Generalizar la demostración del Teorema 1 de la Sección 44 y establecer así la siguiente ley general de la teoría de relaciones (cf. observaciones en la Sección 37):

toda relación R asimétrica en la clase K es también irreflexiva en esa clase.

5. Mostrar lo siguiente: si se admite el Teorema 1 como un nuevo axioma, de éste y del Axioma 4 se puede deducir el antiguo

Axioma 2 como teorema. Generalizando este razonamiento, demostrar la siguiente ley general de la teoría de relaciones:

toda relación R irreflexiva y transitiva en la clase K es también asimétrica en esa clase.

*6. Al final de la Sección 44 hemos tratado de explicar por qué puede omitirse la demostración del Teorema 2. Estas observaciones constituyen una aplicación de ciertas consideraciones generales formuladas en el Capítulo VI. Explíquese esto en detalle, y, en particular, especifíquense las consideraciones referidas.

7. Tradúzcanse los siguientes teoremas al lenguaje ordinario y demuéstreselos a partir del primer grupo de axiomas:

(a) $\underset{x,y}{\mathsf{A}} [x = y \leftrightarrow (\sim (x < y) \wedge \sim (y < x))]$;

(b) $\underset{x,y}{\mathsf{A}} [x < y \rightarrow \underset{z}{\mathsf{A}} [x < z \vee z < y]]$.

8. Del Axioma 4 y de la Definición 1 dedúzcanse los teoremas siguientes:

(a) *si* $x < y$ *e* $y \leqslant z$, *entonces* $x < z$;
(b) *si* $x \leqslant y$ *e* $y < z$, *entonces* $x < z$;
(c) *si* $x \leqslant y$, $y < z$, *y* $z \leqslant t$, *entonces* $x < t$.

Expresar estos teoremas en lenguaje simbólico.

9. Demostrar que las relaciones $\leqslant$ y $\geqslant$ son reflexivas, transitivas y conexas. ¿Son simétricas o asimétricas?

10. Demostrar que entre dos números cualesquiera rigen exactamente tres de las seis relaciones siguientes: $=$, $<$, $>$, $\neq$, $\leqslant$ y $\geqslant$.

11. Tanto la recíproca como la negación de cada una de las relaciones indicadas en el ejercicio anterior están también entre las seis relaciones. Demostrarlo con precisión.

*12. ¿Entre cuáles de las relaciones dadas en el Ejercicio 10 rige la relación de inclusión? ¿Cuál será la suma, el producto y el producto relativo de cualquier par de esas relaciones?

Indicación: Recuérdense los términos explicados en la Sección 28. No se omitan pares formados por dos relaciones iguales, y recuérdese que el producto relativo puede depender del orden de los factores (cf. Ejercicio 5 del Capítulo V). En total deben examinarse 36 pares de relaciones.

VIII

CONSTRUCCIÓN DE UNA TEORÍA MATEMÁTICA: LEYES SOBRE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

47. Axiomas sobre la adición; propiedades generales de operaciones; los conceptos de grupo y de grupo abeliano

Pasamos ahora a estudiar el segundo grupo de axiomas que consta de las seis proposiciones siguientes:

AXIOMA 6. *Para números cualesquiera* y, z, *existe un número* x *tal que* $x = y + z$; en otras palabras: *si* $y \in \mathbf{N}$ *y* $z \in \mathbf{N}$, *entonces también* $y + z \in \mathbf{N}$.

AXIOMA 7. $x + y = y + x$.

AXIOMA 8. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AXIOMA 9. *Para números cualesquiera* x *e* y *existe un número* z *tal que* $x = y + z$.

AXIOMA 10. *Si* $y < z$, *entonces* $x + y < x + z$.

AXIOMA 11. *Si* $y > z$, *entonces* $x + y > x + z$.

Por ahora nos ocuparemos con las cuatro primeras proposiciones del segundo grupo, es decir, con los Axiomas 6-9; éstos atribuyen a la adición una serie de propiedades sencillas que encontramos también a menudo en el estudio de otras partes de la lógica y la matemática.

Para la designación de estas propiedades introduciremos algunos términos especiales. Por ejemplo, diremos que una operación O es REALIZABLE EN LA CLASE K o que la clase K es CERRADA BAJO LA OPERACIÓN O, si el resultado de efectuar la operación O con dos elementos cualesquiera de la clase K es de nuevo un elemento de K; en otras palabras, si para cualquier par de elementos y, z de la clase K, existe un elemento x de esta clase tal que

$$x = y\,O\,z.$$

La operación O es llamada CONMUTATIVA EN LA CLASE K, si el resultado de la operación no depende de la ordenación de los elementos de K con los cuales se lleva a cabo, o dicho con más exactitud, si para dos elementos cualesquiera x e y de dicha clase, tenemos:

$$x\,O\,y = y\,O\,x.$$

La operación O se llama ASOCIATIVA EN LA CLASE K, si el resultado es independiente del modo como se agrupen los elementos, o más precisamente, si para tres elementos cualesquiera x, y y z de la clase K, se cumple la condición:

$$x\,O\,(y\,O\,z) = (x\,O\,y)\,O\,z.$$

Decimos que la operación O es INVERTIBLE A DERECHA O INVERTIBLE A IZQUIERDA EN LA CLASE K, si, para dos elementos cualesquiera x, y de la clase K, existe siempre un elemento z de esa clase tal que:

$$x = y\,O\,z \quad \text{o} \quad x = z\,O\,y,$$

respectivamente. Una operación que sea simultáneamente invertible a derecha y a izquierda, se llama simplemente INVERTIBLE EN LA CLASE K; como es fácil ver, toda operación conmutativa que sea invertible a derecha o a izquierda es invertible. Ahora diremos que una clase K es un GRUPO CON RESPECTO A LA OPERACIÓN O, si esta operación es realizable, asociativa e invertible en K; si, además, la operación O es conmutativa, la clase K es llamada un GRUPO ABELIANO CON RESPECTO A LA OPERACIÓN O. El concepto de grupo, y en particular el de grupo abeliano, se trata

en una disciplina matemática especial, la llamada TEORÍA DE GRUPOS, de que hemos habladoe n el Capítulo V[1].

En caso de que la clase K sea la clase universal (o el universo de discurso de la teoría considerada, cf. Sección 23), omitiremos usualmente la referencia a esta clase al emplear términos tales como «realizable», «conmutativa», etc.

De acuerdo con la terminología introducida más arriba, los Axiomas 6-9 reciben los nombres de LEY DE REALIZABILIDAD, LEY CONMUTATIVA, LEY ASOCIATIVA y LEY DE INVERSIÓN A DERECHA para la operación de adición, respectivamente. Estos cuatro axiomas reunidos, establecen que el conjunto de todos los números constituye un grupo abeliano con respecto a la adición.

48. Leyes conmutativa y asociativa para un número cualquiera de sumandos

El Axioma 7, es decir, la ley conmutativa, tal como la hemos expuesto, se refiere a dos números, y el Axioma 8 o ley asociativa a tres. Sin embargo, se pueden establecer muchas otras leyes conmutativas y asociativas relativas a un número arbitrario de números; por ejemplo, la fórmula:

$$x + (y + z) = y + (z + x)$$

es un ejemplo de ley conmutativa para tres sumandos, y la fórmula:

$$x + [y + (z + u)] = [(x + y) + z] + u$$

representa una de las leyes asociativas para cuatro sumandos. Aún hay otros teoremas de carácter mixto, cada uno de los cuales afirma que —hablando en general— en el resultado de la adición no ejercen ninguna influencia ciertas alteraciones, tanto en el

[1] El concepto de grupo ha sido introducido en matemática por el matemático francés E. GALOIS (1811-1832). La expresión «grupo abeliano» se ha tomado del nombre del matemático noruego N. H. ABEL (1802-1829), cuyas investigaciones han ejercido una gran influencia en el desarrollo del álgebra superior. La importancia trascendental del concepto de grupo para la matemática se conoce especialmente gracias a los trabajos de otro matemático noruego, S. LIE (1842-1899), y del matemático alemán C. F. KLEIN (1849-1925).

orden, como en la distribución de los sumandos en grupos. Como ejemplo, expondremos el siguiente teorema:

TEOREMA 9. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

DEMOSTRACIÓN. De los Axiomas 7 y 8 se obtienen por medio de sustituciones convenientes:

(1) $$z + y = y + z,$$

(2) $$x + (z + y) = (x + z) + y.$$

En virtud de la ley de LEIBNIZ y teniendo en cuenta (1), sustituiremos en (2) «$z + y$» por «$y + z$» y llegaremos así a la fórmula deseada:

$$x + (y + z) = (x + z) + y.$$

De manera análoga podemos deducir todas las leyes conmutativas y asociativas relativas a números arbitrarios de sumandos, de los Axiomas 7 y 8, con la ayuda eventual del Axioma 6. Dichos teoremas se aplican a menudo en la práctica para la transformación de expresiones algebraicas. Por transformación de una expresión que designe un número, entendemos una variación tal que nos lleve a otra expresión que designe el mismo número y que, por lo tanto, podrá ser relacionada con la expresión original mediante el signo de igualdad; las expresiones más frecuentemente sometidas a tales transformaciones son aquellas que contienen variables, siendo, por consiguiente, funciones designativas. En virtud de las leyes conmutativas y asociativas, podemos transformar expresiones arbitrarias de tipos tales como:

$$x + (y + z),\ x + [y + (z + u)],\ \ldots,$$

esto es, expresiones compuestas de constantes y variables numéricas separadas por símbolos de adición y por paréntesis: en cualquiera de ellas podemos permutar a voluntad tantos símbolos numéricos como paréntesis (con tal que la expresión resultante no pierda sentido con la transposición de los paréntesis).

49. Leyes de monotonía para la adición y sus recíprocas

Nos ocuparemos ahora de los Axiomas 10 y 11; éstos son las llamadas LEYES DE MONOTONÍA para la adición con respecto a las relaciones *menor que* y *mayor que*. Se dice, más generalmente, que la operación binaria O es MONÓTONA EN LA CLASE K CON RESPECTO A LA RELACIÓN BINARIA R, si, para elementos cualesquiera x, y, z de la clase K, la fórmula:

$$y\,R\,z$$

implica:

$$(x\,O\,y)\;R\;(x\,O\,z),$$

es decir, cuando el resultado de la operación O realizada sobre los elementos x e y se encuentra en la relación R con el resultado de dicha operación realizada sobre los elementos x y z. (En el caso de operaciones no conmutativas, deberemos distinguir, estrictamente hablando, entre monotonía a derecha y monotonía a izquierda; la propiedad que acabamos de definir se llamará monotonía a derecha.)

La operación de adición es monótona, no solamente respecto de las relaciones *menor que* y *mayor que* —como se deduce de los Axiomas 10 y 11—, sino también respecto de las restantes relaciones entre números discutidas en la Sección 46. Mostraremos esto solamente para la relación de identidad:

TEOREMA 10. *Si* $y = z$, *entonces* $x + y = x + z$.

DEMOSTRACIÓN. La suma $x + y$, cuya existencia garantiza el Axioma 6, es igual a sí misma (según la Ley II de la Sección 17):

$$x + y = x + y.$$

Teniendo en cuenta la hipótesis del teorema, en el segundo miembro de la igualdad indicada se podrá sustituir la variable «*y*» por «*z*», obteniéndose la fórmula deseada:

$$x + y = x + z.$$

La recíproca del Teorema 10 es también verdadera:

Teorema 11. *Si* $x + y = x + z$, *entonces* $y = z$.

Esbozaremos dos demostraciones del mismo. La primera, basada en la ley de tricotomía y en los Axiomas 6, 10 y 11, es relativamente sencilla. Para nuestra finalidad ulterior necesitamos, sin embargo, otra demostración que, aunque considerablemente más complicada, se basa exclusivamente en los Axiomas 7-9.

Primera demostración. Supongamos que el teorema en cuestión fuese falso; existirían entonces números x, y y z para los cuales valdría:

(1) $$x + y = x + z,$$

y

(2) $$y \neq z.$$

Como $x + y$ y $x + z$ son números (Axioma 6), teniendo en cuenta la ley de tricotomía, éstos satisfacen sólo una de las fórmulas:

$$x + y = x + z, \quad x + y < x + z \quad \text{y} \quad x + y > x + z;$$

por consiguiente, como por (1) es válida la primera de dichas fórmulas, las otras serán automáticamente eliminadas. Tendremos, pues,

(3) $$x + y \nless x + z \quad \text{y} \quad x + y \ngtr x + z.$$

Por otra parte, si aplicamos de nuevo la ley de tricotomía, de la desigualdad (2) concluiremos que

$$y < z \quad \text{o} \quad y > z.$$

Luego, por los Axiomas 10 y 11:

(4) $$x + y < x + z \quad \text{o} \quad x + y > x + z.$$

Las condiciones (3) y (4) se contradicen. La suposición inicial queda así refutada, y el teorema debe considerarse demostrado.

*SEGUNDA DEMOSTRACIÓN. Aplicaremos el Axioma 9 en el que sustituiremos «x» por «y» y «z» por «u». Se puede concluir entonces, que existe un número u que satisface la fórmula:

$$y = y + u;$$

como, según el Axioma 7,

$$y + u = u + y,$$

y la relación de igualdad es transitiva (cf. Ley IV de la Sección 17), obtenemos:

(1) $$y = u + y.$$

A continuación aplicaremos el Axioma 9 por segunda vez, sustituyendo en él «x» por «z» y «z» por «v»; obtenemos así un número v que satisface la igualdad:

(2) $$z = y + v.$$

Teniendo en cuenta (1), se puede sustituir en (2) la variable «y» por la expresión «$u + y$», y obtenemos entonces:

$$z = (u + y) + v.$$

Como además, en virtud de la ley asociativa (Axioma 8) la fórmula:

$$u + (y + v) = (u + y) + v$$

es válida, aplicando la Ley V de la Sección 17 llegamos a la fórmula:

$$z = u + (y + v).$$

En virtud de (2), podemos reemplazar aquí «$y + v$» por «z» (usando la ley de LEIBNIZ), de modo que finalmente obtenemos:

(3) $$z = u + z.$$

Apliquemos el Axioma 9 por tercera vez, pero sustituyendo ahora «x», «y» y «z» por «u», «x» y «w», respectivamente. De este modo concluimos la existencia de un número w tal que

$$u = x + w;$$

como

$$x + w = w + x$$

es válida, valdrá también:

$$u = w + x. \tag{4}$$

En virtud de (4), de (1) se obtiene:

$$y = (w + x) + y;$$

como, debido a la ley asociativa, también resulta que:

$$w + (x + y) = (w + x) + y,$$

esta fórmula se convierte en:

$$y = w + (x + y). \tag{5}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis del teorema a demostrar, sustituyamos en la igualdad (5) «$x + y$» por «$x + z$», con lo cual llegamos a:

$$y = w + (x + z). \tag{6}$$

Nuevamente en virtud de la ley asociativa, se obtiene:

$$w + (x + z) = (w + x) + z,$$

que en combinación con (6) nos proporcionará la fórmula:

$$y = (w + x) + z.$$

En virtud de (4), podemos reemplazar aquí «$w + x$» por «u». De esta manera obtenemos:

(7) $$y = u + z.$$

De las igualdades (7) y (3) se sigue que:

$$y = z,$$ c.q.d.*

Haremos aquí algunas observaciones relacionadas con la primera demostración del Teorema 11. Lo mismo que en la demostración del Teorema 1, ella es un ejemplo de demostración indirecta. El esquema de esta demostración se puede representar de la siguiente manera. Para demostrar una proposición, por ejemplo «*p*», suponemos que dicha proposición es falsa, es decir, asumimos la proposición «*no p*». De esta hipótesis derivamos una consecuencia «*q*», es decir, demostramos la implicación:

si no p, entonces q

(en el caso presente esta consecuencia «*q*» es la conjunción de las condiciones (3) y (4) que aparecen en la demostración). Por otra parte, empero, podemos probar (o bien en virtud de leyes generales de la lógica, como en la demostración considerada, o bien en virtud de teoremas demostrados previamente dentro de la disciplina matemática en que se llevan a cabo todos estos argumentos) que la consecuencia obtenida es falsa, esto es, que «*no q*» es válida; estamos obligados entonces a rechazar la hipótesis de partida y a reconocer como verdadera la proposición «*p*». Si diésemos a este razonamiento la forma de una demostración completa, en ella desempeñaría un papel esencial una ley lógica que constituye una variante de la ley de contraposición que ya conocemos de la Sección 14 y que dice lo siguiente:

De: si no p, entonces q, se sigue que: si no q, entonces p.

La demostración en consideración se diferencia ligeramente de la del Teorema 1. En la de éste partíamos de la hipótesis de que el teorema era falso para llegar a la conclusión de que el mismo era verdadero, es decir, derivamos una consecuencia en contradicción

directa con la hipótesis asumida; aquí en cambio, de una hipótesis análoga hemos deducido una consecuencia cuya falsedad conocíamos por otro lado. Esta diferencia no es, sin embargo, esencial; sobre la base de leyes lógicas no ofrecería ninguna dificultad llevar la demostración del Teorema 1 (como igualmente, cualquier otra forma de inferencia indirecta) a la forma del esquema expuesto.

Lo mismo que el Teorema 10, pueden invertirse también las otras dos leyes de monotonía, es decir, los Axiomas 10 y 11:

TEOREMA 12. *Si* $x + y < x + z$, *entonces* $y < z$.

TEOREMA 13. *Si* $x + y > x + z$, *entonces* $y > z$.

Ambos se demuestran con facilidad tomando como modelo la demostración del Teorema 1.

50. Sistemas cerrados de proposiciones

Hay una ley lógica general cuyo conocimiento simplifica considerablemente la demostración de los tres últimos teoremas (11, 12 y 13). Es ésta, la llamada LEY DE LOS SISTEMAS CERRADOS O LEY DE HAUBER[1]; ella permite en algunos casos, cuando hemos probado varias proposiciones condicionales, inferir de la forma de esta proposiciones, la validez de las correspondientes proposiciones recíprocas.

Supongamos dadas algunas implicaciones, tres por ejemplo, a las que daremos la siguiente forma esquemática:

si p_1 *entonces* q_1;
si p_2 *entonces* q_2;
si p_3, *entonces* q_3.

Diremos que estas tres proposiciones forman un SISTEMA CERRADO, cuando sus antecedentes agoten todos los casos posibles, esto es, cuando sea verdadera

$$p_1 \text{ o } p_2 \text{ o } p_3,$$

[1] En honor del matemático alemán K. F. HAUBER (1775-1851).

y sus consecuentes se excluyan mutuamente:

si q_1, *entonces no* q_2; *si* q_1, *entonces no* q_3; *si* q_2, *entonces no* q_3.

La ley de los sistemas cerrados afirma que, si son verdaderas ciertas proposiciones condicionales que constituyen un sistema cerrado, entonces también son verdaderas las correspondientes proposiciones recíprocas.

El ejemplo más sencillo de sistema cerrado es un sistema compuesto por dos proposiciones, una proposición condicional:

si p, *entonces* q,

y la proposición contraria:

si no p, *entonces no* q.

En este caso, para demostrar las dos proposiciones recíprocas, no es necesario siquiera apoyarse en la ley de los sistemas cerrados; bastaría aplicar las leyes de contraposición.

El Teorema 10 y los Axiomas 10 y 11 constituyen un sistema cerrado de tres proposiciones, como se deduce de la ley de tricotomía: como entre dos números arbitrarios rige exactamente una de las tres relaciones $=$, $<$ y $>$, las hipótesis de dichas tres proposiciones, es decir, las fórmulas:

$$y = z, \quad y < z, \quad y > z,$$

agotan todos los casos posibles, mientras que sus conclusiones, esto es, las fórmulas:

$$x + y = x + z, \quad x + y < x + z, \quad x + y > x + z,$$

se excluyen mutuamente. (La ley de tricotomía implica todavía más: no sólo las tres primeras fórmulas agotan todos los casos posibles, sino que se excluyen entre sí, y las tres últimas no solamente se excluyen, sino que agotan además todos los casos posibles; sin embargo, esta circunstancia es irrelevante para nosotros.) Por el mero hecho de constituir un sistema cerrado las tres pro-

posiciones indicadas, deben ser verdaderos los Teoremas recíprocos 11-13.

En la geometría elemental encontramos numerosos ejemplos de sistemas cerrados; por ejemplo, al examinar la posición relativa de dos círculos nos encontramos con un sistema cerrado, compuesto por cinco proposiciones. Para terminar, advertiremos todavía que quien no conozca la ley de los sistemas cerrados, pero intenta probar las recíprocas de las proposiciones que forman un sistema de esta clase, podrá aplicar automáticamente la forma de inferencia que hemos empleado en la primera demostración del Teorema 11.

51. Consecuencias de las leyes de monotonía

Los Teoremas 10 y 11 se pueden resumir en uno sólo:

$$y = z \quad \textit{si, y sólo si,} \quad x + y = x + z.$$

Del mismo modo se pueden combinar los Axiomas 10 y 11 con los Teoremas 12 y 13. Los teoremas así obtenidos se designan como LEYES DE TRANSFORMACIÓN EQUIVALENTE DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES por medio de la adición. El contenido de estos teoremas se describe a veces de la siguiente manera: si a ambos miembros de una igualdad o desigualdad se suma un mismo número, sin cambiar el signo de igualdad o desigualdad, se obtendrá una igualdad o desigualdad equivalente a la primera (evidentemente, esta formulación no es completamente correcta, ya que los miembros de tales igualdades o desigualdades no son números, sino expresiones, a las que no es posible sumar número alguno). Los teoremas considerados tienen un papel importante en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Deduciremos una consecuencia más de las leyes de monotonía.

TEOREMA 14. *Si* $x + z < y + t$, *entonces* $x < y$ *o* $z < t$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que la conclusión del teorema fuese falsa; no sería entonces x menor que y ni z menor

que t. De acuerdo con la ley de tricotomía, se concluiría de aquí que una de las dos fórmulas:

$$x = y \quad \text{o} \quad x > y,$$

y también una de las dos fórmulas:

$$z = t \quad \text{o} \quad z > t,$$

deben ser válidas. Tendremos que discutir, pues, las cuatro posibilidades siguientes:

(1) $$x = y \quad y \quad z = t,$$

(2) $$x = y \quad y \quad z > t,$$

(3) $$x > y \quad y \quad z = t,$$

(4) $$x > y \quad y \quad z > t.$$

Consideremos ante todo el primer caso; asumimos, por consiguiente, la validez de las dos igualdades (1). En virtud del Teorema 10, de la primera deducimos:

$$z + x = z + y;$$

como, por el Axioma 7, también son válidas las fórmulas:

$$x + z = z + x \quad \text{y} \quad z + y = y + z,$$

aplicando dos veces la ley de transitividad para la relación de identidad, inferimos:

(5) $$x + z = y + z.$$

De la segunda de las igualdades admitidas, es decir, de la fórmula:

$$z = t,$$

obtenemos nuevamente en virtud del Teorema 10:

(6) $$y + z = y + t,$$

que, junto con (5), da:

(7) $$x + z = y + t.$$

Razonando exactamente del mismo modo (aplicando los Axiomas 4, 5, 10 y 11), en cada uno de los restantes casos (2), (3) y (4), obtenemos la desigualdad:

(8) $$x + z > y + t.$$

En cualquier caso debe ser válida una de las fórmulas (7) u (8). Como $x + z$ e $y + t$ son números (Axioma 6), se sigue de la ley de tricotomía que la fórmula:

$$x + z < y + t$$

no puede ser válida.

Así, de la hipótesis de que la conclusión es falsa hemos llegado a una contradicción inmediata con la hipótesis del teorema. Debe rechazarse tal suposición y reconocer que la conclusión del teorema se sigue, efectivamente, de la hipótesis.

El razonamiento que se acaba de exponer se incluye entre las demostraciones indirectas; con sólo una modificación de detalle se lo podría llevar a la forma esquemática descrita en la Sección 49 en relación con la primera demostración del Teorema 11. Sin embargo, formalmente el curso del razonamiento es aquí algo distinto del de la demostración de los Teoremas 1 y 11. La inferencia presenta el siguiente esquema. A fin de demostrar una proposición que presente la forma de una implicación, por ejemplo, la proposición:

si p, entonces q,

asumiremos que el consecuente de la proposición, es decir, «*q*», es falso (pero no la proposición completa); de esta suposición, esto es, de «*no q*», se infiere que la hipótesis es falsa, es decir, que «*no p*» es válida. En otras palabras, en lugar de demostrar la proposición en cuestión, se da una prueba de su contrarrecíproca:

si no q, entonces no p,

y de ésta se puede inferir la validez de la proposición original. La base para una inferencia de este tipo se encuentra en una ley del cálculo proposicional que afirma que la verdad de la proposición contrarrecíproca implica siempre la de la proposición original (cf. Sección 14).

Inferencias de esta forma son muy comunes en todas las disciplinas matemáticas; ésta es la variedad más corriente de demostraciones indirectas.

52. Definición de sustracción; operaciones inversas

Mostremos cómo puede introducirse el concepto de sustracción en nuestras consideraciones. Para ello estableceremos ante todo el siguiente teorema:

TEOREMA 15. *Para dos números cualesquiera y, z existe exactamente un número x tal que $y = z + x$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Axioma 9 sabemos que existe al menos un número x que satisface la fórmula:

$$y = z + x.$$

Debemos mostrar que no existe más de un tal número; en otras palabras, que dos números cualesquiera u y v que satisfacen dicha fórmula son idénticos. Sea, pues,

$$y = z + u \quad \text{e} \quad y = z + v.$$

Usando las leyes de transitividad y simetría para la relación $=$, se deduce inmediatamente de las últimas igualdades que:

$$z + u = z + v,$$

de donde, por el Teorema 11, obtenemos:

$$u = v.$$

Existe, así, exactamente un número x (cf. Sección 20) tal que:

$$y = z + x \qquad \text{c.q.d.}$$

Este único número x de que trata el teorema expuesto, se designa con el símbolo:

$$y - z;$$

se leerá como de costumbre «*la diferencia entre los números y y z*» o «*el resultado de sustraer el número z del número y*». La definición precisa del concepto de diferencia, es:

DEFINICIÓN 2. *Decimos que* $x = y - z$ *si, y sólo si,* $y = z + x$.

Una operación I es llamada INVERSA A DERECHA DE LA OPERACIÓN O EN LA CLASE K, si las operaciones O e I satisfacen la siguiente condición:

para elementos cualesquiera x, y, z de la clase K, tenemos:
$x = yIz$ *si, y sólo si,* $y = zOx$.

De manera similar se define el concepto de INVERSA A IZQUIERDA DE LA OPERACIÓN O. Si la operación O es conmutativa en la clase K, entonces ambas inversas —a derecha y a izquierda— coinciden, y podemos hablar simplemente de la INVERSA DE LA OPERACIÓN O (o también, de la OPERACIÓN INVERSA DE O). De acuerdo a esta terminología, la Definición 2 expresa sencillamente que la sustracción es la inversa a derecha (o, simplemente, la inversa) de la adición.

53. Definiciones cuyo definiendum contiene el signo de igualdad

*La Definición 2 es un ejemplo de un tipo de definición empleada muy a menudo en matemática. Estas definiciones estipulan el significado de un símbolo que designa un solo objeto o una operación sobre un número dado de objetos (en otras palabras, una función con un número arbitrario de argumentos). En toda definición de esta clase, el definiendum adopta la forma de una ecuación:

$$x = \ldots;$$

en el miembro derecho de ella aparece el mismo símbolo que intentamos definir, o bien una función designativa construida con dicho símbolo y determinadas variables «*y*», «*z*», ..., según que el símbolo en cuestión designe un objeto único, o una operación sobre objetos. El definiens puede ser una función proposicional de cualquier forma, que contenga las mismas variables libres que aparecen en el definiendum, y que enuncie que el objeto x —eventualmente junto con los objetos y, z, ...— satisface tal y tal condición. La Definición 2 establece el significado de un símbolo que designa una operación sobre dos números. Todavía añadiremos otro ejemplo de definiciones de este tipo, la definición del símbolo «0» que designa un número:

decimos que $x = 0$, *si, y sólo si, para todo número* y *se satisface la fórmula:* $y + x = y$.

Definiciones de este tipo llevan consigo un peligro: si al establecerlas no se observan las precauciones necesarias, pueden conducir fácilmente a contradicciones. Un ejemplo concreto aclarará esto.

Dejemos por el momento nuestras investigaciones, y supongamos que en la aritmética dispusiésemos ya del símbolo de multiplicación y quisiésemos definir con su ayuda el símbolo de división. Para este objeto, estableceríamos la definición siguiente, inspirándonos en la Definición 2:

decimos que $x = y : z$ *si, y sólo si,* $y = z \cdot x$.

Si ahora reemplazamos en esta definición «*y*» y «*z*» por «0», y «*x*» primero por «1» y luego por «2», y si observamos que las fórmulas:

$$0 = 0 \cdot 1 \quad \text{y} \quad 0 = 0 \cdot 2$$

son verdaderas, obtenemos inmediatamente:

$$1 = 0 : 0 \quad \text{y} \quad 2 = 0 : 0.$$

Como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, llegamos a:

$$1 = 2,$$

lo que es evidentemente absurdo.

No es difícil mostrar la causa de esta anomalía. Tanto en la Definición 2, como en la definición de cociente considerada, el definiens tiene la forma de una función proposicional con tres variables libres «x», «y» y «z». A cada una de tales funciones proposicionales corresponde una relación ternaria que rige entre los números x, y y z si, y sólo si, estos números satisfacen dicha función proposicional (cf. Sección 27); el objeto de la definición en cuestión, es precisamente introducir un símbolo para designar dicha relación. Ahora bien, si se da al definiendum la forma:

$$x = y - z \quad \text{o} \quad x = y : z$$

respectivamente, se supone de antemano que dicha relación es unívoca (es decir, una operación, o una función; cf. Sección 34) y que en consecuencia, a dos números cualesquiera y, z corresponde a lo sumo un número x que se encuentra con ellos en la relación en cuestión. Pero la univocidad de la relación no es evidente de antemano, y debe ser establecida primero. En la Definición 2 lo hemos hecho, pero no en el caso del cociente, y tampoco sería posible hacerlo, pues la relación en cuestión no es unívoca en un caso: en efecto, si

$$y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0,$$

existe una infinidad de números x, para los cuales

$$y = z \cdot x.$$

Si, por lo tanto, se quiere formular la definición de cociente en la forma expuesta sin introducir contradicciones, deberá excluirse de alguna manera (por ejemplo, agregando condiciones adicionales en el definiens) el caso en que los dos números y, z son iguales a 0.

Las consideraciones anteriores llevan a la siguiente conclusión: a toda definición del tipo de la Definición 2 debe preceder un teorema que corresponda exactamente al Teorema 15, esto es, un teorema que establezca la existencia de un solo número x que satisfaga al definiens. (Aquí se plantea la cuestión de si es necesario probar la existencia de exactamente un número, o de si bastaría con demostrar la existencia de a lo sumo un número con esta propiedad; no discutiremos aquí este problema algo más difícil.)*

54. Teoremas sobre la sustracción

Sobre la base de la Definición 2 y de las leyes de adición, pueden demostrarse sin dificultad alguna los teoremas fundamentales de la teoría de la sustracción, como, por ejemplo, la ley de realizabilidad, las leyes de monotonía y las leyes de transformación equivalente de ecuaciones y desigualdades por medio de la sustracción. Pertenecen también a esta categoría aquellos teoremas que hacen posible la transformación de las llamadas sumas algebraicas, es decir, de expresiones compuestas por constantes y variables numéricas separadas por los signos «+», «—» así como por paréntesis (en tales expresiones se prescinde a menudo de los últimos en virtud de reglas especiales). Expondremos como ejemplo, un teorema perteneciente a la categoría citada:

TEOREMA 16. $x + (y - z) = (x + y) - z.$

DEMOSTRACIÓN. Según el Axioma 9, a los números y y z corresponde un número u tal que

$$(1) \qquad y = z + u;$$

por la Definición 2 esto implica:

$$(2) \qquad u = y - z.$$

En virtud de la ley conmutativa, tenemos:

$$x + y = y + x.$$

Debido a (1), en el miembro derecho de esta igualdad se podrá sustituir «y» por «$z + u$», con lo cual se obtiene:

$$(3) \qquad x + y = (z + u) + x.$$

Por otra parte, del Teorema 9 se sigue que:

$$(4) \qquad z + (x + u) = (z + u) + x.$$

Como dos números iguales a un tercero, son iguales entre sí, de (3) y (4) se infiere:

(5) $$x + y = z + (x + u).$$

Ahora, como $x + y$ y $x + u$ son números (Axioma 6), en la Definición 2 podemos sustituir «$x + u$» y «$x + y$» en lugar de «x» e «y». Entonces, en virtud de (5) se satisface el definiens, y, por consiguiente, también se satisfará el definiendum:

$$x + u = (x + y) - z.$$

Teniendo en cuenta (2), en esta última igualdad se podrá sustituir «u» por «$y - z$», llegándose finalmente a:

$$x + (y - z) = (x + y) - z, \qquad \text{c.q.d.}$$

Con esto damos por terminada la construcción de nuestro fragmento de aritmética.

Ejercicios

1. Consideremos los tres sistemas siguientes, cada uno de los cuales consiste de un conjunto, dos relaciones y una operación:

(a) el conjunto de todos los números, las relaciones $\leqslant$ y $\geqslant$, y la operación de adición;

(b) el conjunto de todos los números, las relaciones $<$ y $>$ y la operación de multiplicación;

(c) el conjunto de todos los números positivos, las relaciones $<$ y $>$ y la operación de multiplicación.

Estudiar cuáles de dichos sistemas constituyen modelos para el sistema de Axiomas 1-11 (cf. Sección 37).

2. Consideremos una recta cualquiera, a la que llamaremos recta numérica: designemos los puntos de ésta por las letras «X», «Y», «Z», ... Elijamos sobre la recta un punto origen O y un punto unidad U distinto de O. Sean ahora X e Y dos puntos distintos

de nuestra línea. Consideremos dos semirrectas, una con origen en O y que pasa por U, la otra con origen en X y que pasa por Y. Diremos que el punto X precede al punto Y, en símbolos:

$$X \dot{<} Y,$$

si, y sólo si, las dos semirrectas son idénticas o una de ellas —no importa cuál— es parte de la otra. En este mismo caso diremos también que el punto Y sigue al punto X, en símbolos:

$$Y \dot{>} X.$$

El punto Z es llamado la suma de los puntos X e Y si satisface las siguientes condiciones: (i), el segmento OX es congruente con el segmento YZ; (ii), si $O \dot{<} X$, entonces $Y \dot{<} Z$, y si $O \dot{>} X$, entonces $Y \dot{>} Z$. La suma de los puntos X e Y se denota por:

$$X \dot{+} Y.$$

Haciendo uso de los teoremas de la geometría, mostrar que el conjunto de los puntos de la recta numérica (o más sencillo, la propia recta numérica), con las relaciones $\dot{<}$ y $\dot{>}$ y la operación $\dot{+}$, constituye un modelo del sistema de axiomas adoptado, y por lo tanto, dicho sistema tiene una interpretación en la geometría.

3. Analicemos cuatro operaciones **A**, **B**, **G** y **K**, que asignen un tercer número a otros dos arbitrarios, lo mismo que la suma. Como resultado de la operación **A** sobre los números x e y consideraremos siempre el número x, y como resultado de la operación **B** sobre ellos, el número y, es decir:

$$x\mathbf{A}y = x, \quad x\mathbf{B}y = y.$$

Con los símbolos «$x\mathbf{G}y$», «$x\mathbf{K}y$» designaremos a aquel de los números x o y que sea no menor o no mayor que el otro, respectivamente; por consiguiente, tenemos:

$$x\mathbf{G}y = x \quad \text{y} \quad x\mathbf{K}y = y \quad \text{en caso que} \quad x \geqslant y;$$
$$x\mathbf{G}y = y \quad \text{y} \quad x\mathbf{K}y = x \quad \text{en caso que} \quad x \leqslant y.$$

¿Cuáles de las propiedades referidas en la Sección 47 son poseídas por estas cuatro operaciones? ¿Constituye el conjunto de todos los números un grupo respecto de alguna de dichas operaciones y en particular, un grupo abeliano?

4. Sea **F** la clase de todos los conjuntos de puntos, esto es, de todas las configuraciones geométricas. ¿Son realizables, conmutativas, asociativas e invertibles en la clase **F** las operaciones de adición y multiplicación de conjuntos definidos en la Sección 25? ¿Constituye la clase **F** un grupo, y en particular, un grupo abeliano, respecto de alguna de dichas operaciones?

5. Mostrar que el conjunto de todos los números no es un grupo abeliano respecto de la multiplicación y sí lo es, en cambio, cada uno de los conjuntos siguientes, respecto de la misma operación:

(a) el conjunto de todos los números distintos de cero;
(b) el conjunto de todos los números positivos;
(c) el conjunto que consiste de los dos números 1 y — 1.

6. Consideremos el conjunto **M** que consiste de los dos números 0 y 1, y definamos en él la operación $\dot{+}$ mediante las fórmulas siguientes:

$$0 \dot{+} 0 = 1 \dot{+} 1 = 0,$$

$$0 \dot{+} 1 = 1 \dot{+} 0 = 1.$$

Determinar si el conjunto **M** es un grupo abeliano respecto de la operación $\dot{+}$.

7. Consideremos el conjunto **M** que consiste de los tres números 0, 1 y 2. Definir una operación $\dot{+}$ con los elementos de dicho conjunto de manera que éste se convierta en un grupo abeliano con respecto a dicha operación.

8. Demostrar que ningún conjunto que consiste de dos o tres números distintos puede ser un grupo abeliano respecto de la

adición. ¿Existirá algún conjunto que consiste de un solo número que sea un grupo abeliano respecto de la misma operación?

9. Deducir de los Axiomas 6-8 los siguientes teoremas:

(a) $x + (y + z) = (z + x) + y$;
(b) $x + [y + (z + t)] = (t + y) + (x + z)$.

10. ¿Cuántas expresiones pueden obtenerse a partir de cada una de las siguientes:

$$x + (y + z), \quad x + [y + (z + t)], \quad x + \{ y + [z + (t + u)] \}$$

si se las transforma exclusivamente en base a los Axiomas 6-8?

11. Formular la definición general de monotonía a izquierda de una operación O respecto de una relación R.

12. En base a los axiomas asumidos por nosotros y a los teoremas deducidos de ellos, demostrar que la adición es una operación monótona en el conjunto de todos los números, respecto de las relaciones $\neq$, $\leqslant$ y $\geqslant$.

13. ¿Es la multiplicación una operación monótona respecto de las relaciones $<$ y $>$

(a) en el conjunto de todos los números,
(b) en el conjunto de todos los números positivos,
(c) en el conjunto de todos los números negativos?

14. ¿Cuáles de las operaciones definidas en el Ejercicio 3 son monótonas respecto de las relaciones $=$, $<$, $>$, $\neq$, $\leqslant$ y $\geqslant$?

15. ¿Son monótonas la adición y multiplicación de clases respecto de la relación de inclusión? ¿Y respecto de las restantes relaciones entre clases que expusimos en la Sección 24?

16. De los axiomas admitidos dedúzcase el siguiente teorema:

si $x < y$ *y* $z < t$, *entonces* $x + z < y + t$.

Sustitúyase en esta proposición el símbolo «$<$» por los «$>$», «$=$», «$\neq$», «$\leqslant$» y «$\geqslant$», e investíguese cuáles de las proposiciones obtenidas de esta manera son verdaderas.

17. Indicar ejemplos de sistemas cerrados de proposiciones en la aritmética y en la geometría.

18. De los axiomas asumidos dedúzcanse los siguientes teoremas:

(a) *si* $x + x = y + y$, *entonces* $x = y$;
(b) *si* $x + x < y + y$, *entonces* $x < y$;
(c) *si* $x + x > y + y$, *entonces* $x > y$.

Indicación: Demuéstrense primero los teoremas recíprocos (usando los resultados del Ejercicio 16), y obsérvese que constituyen un sistema cerrado.

*19. Si de los Axiomas 6-9 solamente, puede deducirse un cierto teorema, éste podrá extenderse a grupos abelianos arbitrarios, puesto que toda clase K, que sea un grupo abeliano respecto de una operación O, constituirá, junto con dicha operación, un modelo para los Axiomas 6-9 (cf. Secciones 37 y 38). Esto afecta, en particular, al Teorema 11 (en virtud de su segunda demostración); valdrá, por lo tanto, el siguiente teorema general de la teoría de grupos:

toda clase K que constituya un grupo abeliano respecto de una operación O, satisface la siguiente condición:

si $x \in K$, $y \in K$, $z \in K$ y $x\,O\,y = x\,O\,z$, *entonces* $y = z$.

Dar una demostración rigurosa de este teorema.

Mostrar, por otra parte, que el Teorema (a) del Ejercicio 18 no puede ser extendido a grupos abelianos cualesquiera, exhibiendo un ejemplo de una clase K y una operación O con las siguientes propiedades: (i), la clase K es un grupo abeliano con respecto a la operación O, y (ii), existen dos elementos distintos x, y en la clase K tales que $x\,O\,x = y\,O\,y$ (cf. Ejercicio 6). ¿Es posible, por

consiguiente, derivar el Teorema (a) de los Axiomas 6-9 solamente?

20. Transformar la demostración del Teorema 14 de manera que tome la forma del esquema que indicamos en la Sección 49 en relación con la primera demostración del Teorema 11.

21. ¿Puede afirmarse que la división es la operación inversa de la multiplicación en el conjunto de todos los números?

22. ¿Existen operaciones inversas (en el conjunto de todos los números o en el de todas las configuraciones geométricas) para las operaciones que expusimos en los Ejercicios 3 y 4?

23. ¿Qué operación es la inversa a derecha, o a izquierda, respectivamente, de la sustracción (en el conjunto de todos los números)?

*24. En la Sección 53 indicamos, a modo de ejemplo, la definición del símbolo «0». Para tener la seguridad de que ésta no puede llevarnos a ninguna contradicción debe estar precedida por el teorema siguiente:

existe exactamente un número x tal que, para cualquier número y tenemos: $y + x = y$.

Demostrar este teorema apoyándose solamente en los Axiomas 6-9.

25. Formular las proposiciones que expresan que la sustracción es realizable, conmutativa, asociativa, invertible a derecha y a izquierda, y monótona a derecha y a izquierda, respecto de la relación *menor que*. Investigar cuáles de dichas proposiciones son verdaderas, y demostrarlas, cuando sea el caso, sobre la base de nuestros axiomas y de la Definición 2 de la Sección 52.

26. De nuestros axiomas y de la Definición 2, dedúzcanse los teoremas siguientes:

(a) $x - (y + z) = (x - y) - z$,

(b) $x - (y - z) = (x - y) + z$,

(c) $x + y = x - [(x - y) - x]$.

*27. Usando la ley de realizabilidad de la sustracción y del Teorema (c) del ejercicio anterior, demostrar el teorema siguiente:

para que un conjunto K de números sea un grupo abeliano respecto de la adición, es necesario y suficiente que la diferencia entre dos números cualesquiera de dicho conjunto, pertenezca también al conjunto K (es decir, *que las fórmulas* $x \in K$ *e* $y \in K$ *impliquen siempre* $x - y \in K$).

Utilizar este teorema para encontrar ejemplos de conjuntos numéricos que sean grupos abelianos respecto de la adición.

28. Escribir en símbolos lógicos todos los axiomas, definiciones y teoremas dados en los dos últimos capítulos.

Indicación: Antes de formular simbólicamente el Teorema 15, póngaselo en una forma equivalente de la que hayan sido eliminados los cuantificadores numéricos en virtud de las explicaciones dadas en la Sección 20.

*29. Escribir en simbolismo lógico las fórmulas que expresan el hecho de que una clase K es un grupo abeliano respecto de la operación O (de acuerdo a la definición dada en la Sección 47). Considérense además las tres fórmulas siguientes:

(a) $\underset{x,y}{\mathsf{A}}[(x \in K \wedge y \in K) \rightarrow x\,O\,y \in K]$,

(b) $\underset{x,y,z}{\mathsf{A}}[(x \in K \wedge y \in K \wedge z \in K) \rightarrow (x\,O\,y)Oz = xO(y\,O\,z)]$.

(c) $\underset{x,y}{\mathsf{A}}[(x \in K \wedge y \in K) \rightarrow \underset{z}{\mathsf{E}}[z \in K \wedge x = y\,O\,z \wedge x = z\,O\,y]]$.

Trátese de demostrar que estas tres fórmulas dan una definición equivalente de la expresión:

la clase K es un grupo abeliano respecto de la operación O.

IX

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS SOBRE LA TEORÍA CONSTRUIDA

55. Eliminación de axiomas superfluos en el sistema original

En los dos capítulos anteriores vimos a grandes rasgos los fundamentos de una teoría matemática elemental que constituye un fragmento de la aritmética. En éste, añadiremos algunas observaciones de carácter metodológico relativas al sistema de axiomas y términos primitivos que sirve de base a dicha teoría.

Ante todo, intentaremos hacer intuitivas con ejemplos concretos las observaciones que hicimos en la Sección 39 sobre problemas como el de la arbitrariedad en la elección de axiomas y términos primitivos, la posibilidad de prescindir de axiomas superfluos, y otros.

Comencemos preguntándonos si el sistema de Axiomas 1-11 que hemos adoptado —que llamaremos, por brevedad, SISTEMA $\mathcal{U}$— contiene acaso axiomas superfluos, esto es, axiomas que pueden deducirse de los restantes del sistema. No es difícil contestar a dicha pregunta, y precisamente, en sentido afirmativo. En efecto, tenemos:

Tres de los axiomas del Sistema $\mathcal{U}$, a saber, uno de los Axiomas 4 *o* 5, *el Axioma* 6 *y uno de los Axiomas* 10 *u* 11, *pueden ser derivados de los restantes axiomas.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar mostramos que

(I) *cualquiera de los Axiomas* 4 *o* 5 *puede ser derivado del otro con ayuda de los axiomas* 1-3.

Para ello observemos que la demostración del Teorema 3 se basa exclusivamente —directa o indirectamente— en los Axiomas 1-3. Por otra parte, disponiendo de antemano del Teorema 3, el Axioma 5 se puede deducir del Axioma 4 (o viceversa) por el siguiente razonamiento:

Si

$$x > y \quad e \quad y > z,$$

entonces, por el Teorema 3,

$$y < x \quad y \quad z < y;$$

aplicando el Axioma 4 (con «x» reemplazado por «z» y «z» por «x») obtenemos:

$$z < x,$$

que, por el Teorema 3 nuevamente, implica:

$$x > z,$$

es decir, la conclusión del Axioma 5.

De manera análoga puede probarse que:

(II) *cualquiera de los Axiomas* 10 *u* 11 *puede ser derivado del otro con ayuda de los Axiomas* 1-3.

Finalmente, tenemos:

(III) *el Axioma* 6 *puede derivarse de los Axiomas* 7-9.

*La demostración de esta última aserción no es tan sencilla, y recuerda la segunda demostración del Teorema 11. Supongamos dados dos números arbitrarios x e y; por aplicación cuádruple

del Axioma 9 podemos sucesivamente introducir cuatro nuevos números u, w, z y v que satisfacen las siguientes fórmulas:

$$(1) \qquad y = y + u,$$

$$(2) \qquad u = x + w,$$

$$(3) \qquad y = w + z,$$

$$(4) \qquad z = y + v.$$

Teniendo en cuenta la ley conmutativa, de (1) se deduce que

$$y = u + y;$$

si se combina esta igualdad con (4) y se razona del mismo modo que en la demostración del Teorema 11, haciendo uso de la ley asociativa se llega a la fórmula:

$$(5) \qquad z = u + z.$$

Partiendo de (5) y (2) llegamos a:

$$z = (x + w) + z,$$

de donde, nuevamente en virtud de la ley asociativa,

$$z = x + (w + z).$$

que, en virtud de (3), implica:

$$(6) \qquad z = x + y.$$

Así hemos mostrado que para dos números cualesquiera x e y existe un número z, para el cual vale (6), que es, precisamente, lo que se trataba de demostrar.

Debemos agregar que el razonamiento que se acaba de esbozar no sólo es aplicable a la adición, sino también —de acuerdo a

las observaciones generales de las Secciones 37 y 38— a cualquier otra operación: toda operación O que sea conmutativa, asociativa e invertible a derecha en una clase K, será también realizable en esa clase, y la clase K constituirá entonces un grupo abeliano respecto de dicha operación (cf. Sección 47).*

De las consideraciones expuestas se desprende que el Sistema $\mathcal{U}$ contiene al menos tres axiomas superfluos; por consiguiente, se podrá reemplazar éste por otro sistema equivalente integrado por los ocho axiomas siguientes:

Axioma 1'. *Para números cualesquiera x e y es válido:* $x = y$ *o* $x < y$ *o* $x > y$.

Axioma 2'. *Si* $x < y$, *entonces* $y \nless x$.

Axioma 3'. *Si* $x > y$, *entonces* $y \ngtr x$.

Axioma 4'. *Si* $x < y$ *e* $y < z$, *entonces* $x < z$.

Axioma 5'. $x + y = y + x$.

Axioma 6'. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Axioma 7'. *Para números cualesquiera x e y existe un número z tal que* $x = y + z$.

Axioma 8'. *Si* $y < z$, *entonces* $x + y < x + z$.

Llamaremos sistema $\mathcal{U}'$ a este sistema de axiomas; tenemos ahora el siguiente resultado:

Los Sistemas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son equivalentes.

Comparado con el original, el nuevo sistema simplificado presenta ciertas lagunas desde el punto de vista estético y didáctico: ya no es simétrico respecto de los dos símbolos primitivos «$<$» y «$>$», ya que en este sistema se admiten sin demostración ciertas propiedades de la relación $<$, mientras que otras propiedades completamente análogas de la relación $>$ tienen que ser demostradas; falta también en el mismo el Axioma 6, de carácter elemental e intuitivo, pero cuya deducción, a partir de los axiomas contenidos en el Sistema $\mathcal{U}'$, ofrece algunas dificultades.

56. Independencia de los axiomas del sistema simplificado

Ahora surge la cuestión de si el Sistema $\mathcal{V}'$ contiene aún axiomas superfluos. Podemos mostrar que no es éste el caso:

$\mathcal{V}'$ es un sistema de axiomas mutuamente independientes.

Para establecer la proposición metodológica que acabamos de formular emplearemos el método de demostración por interpretación, que ya ha sido usado en un caso particular en la Sección 37.

Debemos mostrar que ningún axioma del Sistema $\mathcal{V}'$ es deducible de los restantes. Limitémonos, por ejemplo, al Axioma 2'. Si en los axiomas del Sistema $\mathcal{V}'$ sustituimos el símbolo «$<$» por «$\leqslant$», sin ninguna otra alteración, veremos con facilidad que a consecuencia de dicha transformación ninguno de los axiomas, salvo el 2', pierde su validez. Los Axiomas 3', 5', 6' y 7', que no contenían el símbolo «$<$», quedarán inalterados, y de los Axiomas 1', 4' y 8' se obtienen, en virtud de la sustitución citada, ciertos teoremas aritméticos, cuya demostración, sobre la base de los Sistemas $\mathcal{V}$ o $\mathcal{V}'$ y de la Definición 1 del símbolo «$\leqslant$» (cf. Sección 46), no presentan dificultades. Puede, pues, afirmarse que el conjunto **N** de todos los números, las relaciones $\leqslant$ y $>$ y la operación de adición constituyen un modelo para los Axiomas 1' y 3'-8'; el sistema de estos siete axiomas encuentra con ello una nueva interpretación aritmética. Por otra parte, no sería difícil ver que la proposición lograda al transformar el Axioma 2' es falsa, ya que en la aritmética se demuestra fácilmente su negación; la fórmula:

$$x \leqslant y$$

no siempre excluye:

$$y \leqslant x,$$

puesto que existen números x e y que satisfacen al mismo tiempo las dos desigualdades:

$$x \leqslant y \quad \text{e} \quad y \leqslant x$$

(caso que sólo se presenta evidentemente cuando los números x e y son iguales). Si, por lo tanto, uno cree en la consistencia de la aritmética (cf. Sección 41), uno debe aceptar el hecho de que la proposición obtenida del Axioma 2′ no es un teorema de esta disciplina. Y de esto se sigue que el Axioma 2′ no es deducible de los restantes axiomas del Sistema $\mathcal{U}'$; de lo contrario, este axioma no podría dejar de ver válido en una interpretación que hace válidos a los otros axiomas (cf. consideraciones análogas en la Sección 37).

Usando el mismo método de razonamiento, pero aplicando otras interpretaciones, podemos obtener el mismo resultado para cualquiera de los otros axiomas.

*En general, el método de demostración por interpretación puede describirse como sigue. Se trata de mostrar que cierta proposición A no es consecuencia de cierto sistema $\mathfrak{S}$ de axiomas u otros enunciados de una teoría deductiva dada. Con este propósito, consideramos una teoría deductiva arbitraria $\mathfrak{T}$, cuya consistencia asumiremos (puede tratarse, en particular, de la misma teoría a la que pertenecen los enunciados del sistema $\mathfrak{S}$). Tratamos entonces de encontrar, dentro de esta teoría, una interpretación del sistema $\mathfrak{S}$ tal que no la proposición A, sino su negación se transforme en un teorema (o, posiblemente, un axioma) de la teoría $\mathfrak{T}$. Si logramos hacerlo, podemos aplicar la ley de deducción enunciada en la Sección 38. Como sabemos, se sigue de esta ley que, si la sentencia A puede derivarse de los enunciados del sistema $\mathfrak{S}$, ella continuará siendo válida en cualquier interpretación de este sistema. En consecuencia, el mero hecho de existir una interpretación de $\mathfrak{S}$ en la acual A no es válida, es una prueba de que esta proposición no puede ser derivada del sistema $\mathfrak{S}$. Hablando más estrictamente, es una prueba de la proposición condicional:

si la teoría $\mathfrak{T}$ es consistente, entonces la proposición A no puede ser derivada de los enunciados del sistema $\mathfrak{S}$.

Es fácil ver por qué debemos incluir la hipótesis de que la teoría $\mathfrak{T}$ es consistente. De lo contrario, la teoría $\mathfrak{T}$ podría contener enter sus axiomas y teoremas dos proposiciones contradictorias, y en-

tonces no podríamos concluir que $\mathfrak{T}$ no contiene la proposición A (más precisamente, la interpretación de A), del hecho que $\mathfrak{T}$ contiene la negación de A; de esta manera nuestro argumento no seguiría siendo válido.

Para llegar por el camino expuesto a una prueba exhaustiva de la independencia de un sistema dado de axiomas, deberá aplicarse el método descrito tantas veces como axiomas haya en el sistema considerado; cada axioma se tomará sucesivamente como la proposición A, mientras que $\mathfrak{S}$ consistirá de los restantes axiomas del sistema.*

57. Eliminación de términos primitivos superfluos y subsiguiente simplificación del sistema de axiomas; concepto de grupo abeliano ordenado

Volvamos de nuevo al Sistema $\mathcal{U}'$. Siendo éste independiente, será imposible simplificarlo desechando axiomas superfluos; pero podrá lograrse una simplificación por otro camino distinto. Comprobamos, en efecto, que los términos primitivos del Sistema $\mathcal{U}'$ no son independientes entre sí. En la lista de términos primitivos puede eliminarse uno cualquiera de los símbolos «$<$» o «$>$», y definirlo a partir del otro. Esto puede verse fácilmente del Teorema 3; teniendo en cuenta su forma, este teorema puede ser considerado como una definición del símbolo «$>$» mediante el símbolo «$<$», y si permutamos en él los dos miembros de la equivalencia, podremos considerarlo también como definición del símbolo «$<$» mediante el símbolo «$>$» (en ambos casos convendrá anteponer al teorema las palabras «*decimos que*»; cf. Sección 11). Desde el punto de vista didáctico, podrían hacerse algunas objeciones a semejante reducción, ya que los términos «$<$» y «$>$» tienen significados igualmente claros y las relaciones denotadas por ellos poseen propiedades completamente análogas; por consiguiente, pudiera parecer artificial considerar uno de estos términos inmediatamente comprensible, mientras que el otro debe ser primero definido con su ayuda; estas objeciones, sin embargo, no son convincentes.

Si, prescindiendo de razones didácticas, decidimos eliminar uno de los símbolos en cuestión de la lista de términos primitivos, se

presentará el problema de dar a nuestro sistema de axiomas una forma en que no aparezcan términos definidos (diremos de paso que éste es un postulado metodológico del que a menudo se prescinde en la práctica; en geometría especialmente, los axiomas se formulan de ordinario con la ayuda de términos definidos, para acentuar su sencillez y claridad). Este problema no presenta ninguna dificultad; toda fórmula del tipo:

$$x > y,$$

se reemplazará en el Sistema $\mathcal{U}'$ simplemente por la fórmula:

$$y < x$$

que, en virtud del Teorema 3, es equivalente a la primera. Es fácil ver que el Axioma 1 puede reemplazarse por la ley de conexión, es decir, por el Teorema 4, ya que cada una de estas dos proposiciones es deducible de la otra en virtud de las leyes generales de la lógica (del cálculo proposicional, exactamente); el Axioma 3 se transformará ahora en una simple sustitución del Axioma 2, y puede ser omitido por este motivo. Así llegamos al sistema compuesto por los siete axiomas siguientes:

AXIOMA 1″. *Si* $x \neq y$, *entonces* $x < y$ *o* $y < x$.

AXIOMA 2″. *Si* $x < y$, *entonces* $y \nless x$.

AXIOMA 3″. *Si* $x < y$ *e* $y < z$, *entonces* $x < z$.

AXIOMA 4″. $x + y = y + x$.

AXIOMA 5″. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AXIOMA 6″. *Para números cualesquiera* x *e* y, *existe un número* z *tal que* $x = y + z$.

AXIOMA 7″. *Si* $y < z$, *entonces* $x + y < x + z$.

Este sistema de axiomas, llamado SISTEMA $\mathcal{U}''$, resulta entonces equivalente a cada uno de los dos sistemas anteriores, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$. Al decir esto cometemos, sin embargo, una inexactitud, ya que es imposible deducir de los axiomas del Sistema $\mathcal{U}''$ las proposiciones de los Sistemas $\mathcal{U}$ o $\mathcal{U}'$ en que intervenga el símbolo «>»,

mientras no se agregue al Sistema $\mathcal{U}''$ la definición de dicho símbolo. Como es sabido, a esta definición puede darse la forma siguiente:

DEFINICIÓN 1''. *Decimos que* $x > y$, *si, y sólo si,* $y < x$.

También sabemos que esta última proposición puede demostrarse basándose en los Sistemas $\mathcal{U}$ o $\mathcal{U}'$, si se la trata no como definición, sino como un teorema corriente (suprimiendo entonces las palabras «*decimos que*»). La equivalencia de los tres sistemas en cuestión puede ahora formularse como sigue:

El Sistema $\mathcal{U}''$ junto con la Definición 1'' es equivalente a cada uno de los Sistemas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$.

Siempre que se comparen dos sistemas de axiomas que, aunque equivalentes, en parte al menos contengan términos primitivos diferentes, será necesaria una formulación como la que acabamos de ver.

El Sistema $\mathcal{U}''$ se caracteriza ventajosamente por la simplicidad de su estructura. Sus tres primeros axiomas se refieren a la relación *menor que* y juntos establecen que el conjunto **N** está ordenado por esta relación; los tres siguientes se refieren a la adición y expresan que **N** constituye un grupo abeliano respecto de dicha operación; el último axioma —la ley de monotonía— establece finalmente cierta dependencia entre la relación *menor que* y la operación de adición. Decimos que una clase K es un GRUPO ABELIANO ORDENADO RESPECTO DE LA RELACIÓN R Y LA OPERACIÓN O, si, (i) la clase K está ordenada por la relación R, (ii) la clase K es un grupo abeliano respecto de la operación O, y (iii) la operación O es monótona en la clase K respecto de la relación R. De acuerdo a esta terminología, puede decirse que mediante el sistema de axiomas $\mathcal{U}''$ el conjunto de todos los números queda caracterizado como un grupo abeliano ordenado respecto de la relación *menor que* y de la operación de adición.

Pueden establecerse los siguientes hechos concernientes al Sistema $\mathcal{U}''$:

El Sistema $\mathcal{U}''$ es un sistema independiente de axiomas, y además todos sus términos primitivos, a saber, «N», «<» *y* «+», *son mutuamente independientes.*

Omitimos la demostración de este enunciado. Observaremos solamente que para establecer la independencia mutua de los términos primitivos, debe aplicarse nuevamente el método de demostración por interpretación que, en este caso, presenta una forma algo más complicada; por falta de espacio no describiremos las modificaciones a que deberíamos someter dicho método para lograr este propósito.

58. Simplificación ulterior del sistema de axiomas; posibles transformaciones del sistema de términos primitivos

Como es obvio, el Sistema $\mathcal{U}''$ puede sustituirse por cualquier otro sistema de proposiciones equivalentes. Aquí expondremos un ejemplo particularmente sencillo de un sistema de esta clase; éste, que puede ser llamado SISTEMA $\mathcal{U}'''$ y que contiene los mismos términos primitivos que $\mathcal{U}''$, consta solamente de cinco proposiciones:

AXIOMA 1'''. *Si* $x \neq y$, *entonces* $x < y$ *o* $y < x$.

AXIOMA 2'''. *Si* $x < y$, *entonces* $y \nless x$.

AXIOMA 3'''. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

AXIOMA 4'''. *Para números cualesquiera* x *e* y, *existe un número* z *tal que* $x = y + z$.

AXIOMA 5'''. *Si* $x + z < y + t$, *entonces* $x < y$ *o* $z < t$.

Mostraremos que:

Los Sistemas $\mathcal{U}''$ y $\mathcal{U}'''$ *son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos en primer lugar que todos los axiomas del Sistema $\mathcal{U}'''$, o bien están contenidos en el Sistema $\mathcal{U}$ (el Axioma 2''' coincide, en efecto, con el Axioma 2, y el Axioma 4'''

con el Axioma 9), o pueden demostrarse en base a dicho sistema (los Axiomas 1''', 3''' y 5''' coinciden con los Teoremas 4, 9 y 14, respectivamente). Ahora bien, como los Sistemas $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}''$ son equivalentes, según sabíamos por la Sección 57 (siempre se podrá agregar al Sistema $\mathcal{V}''$ la Definición 1''), también podremos afirmar que todas las proposiciones del Sistema $\mathcal{V}'''$ serán demostrables en base al Sistema $\mathcal{V}''$. Sólo faltará, pues, deducir de los axiomas del Sistema $\mathcal{V}'''$ las proposiciones de $\mathcal{V}''$ que faltan en aquél, es decir, los Axiomas 3'', 4'', 5'' y 7''. Esta tarea es algo más difícil.

*Comenzaremos con los Axiomas 4'' y 5''.

(I) *El axioma 4'' puede ser derivado del Sistema $\mathcal{V}'''$.*

Aplicaremos el Axioma 4''' a dos números arbitrarios x e y (insertando «x» en el lugar de «y», y recíprocamente); habrá así un número z tal que:

(1) $$y = x + z.$$

Si en el Axioma 3''' sustituimos además «y» por «x», se obtendrá entonces:

(2) $$x + (x + z) = (x + z) + x.$$

Teniendo en cuenta (1), en el primero y segundo miembro de la segunda igualdad (2) podremos reemplazar «$x + z$» por «y»; con ello obtenemos el Axioma 4'':

$$x + y = y + x.$$

(II) *El Axioma 5'' puede ser derivado del Sistema $\mathcal{V}'''$.*

En efecto, por el Axioma 3''' (con «y» sustituido en lugar de «z» y recíprocamente), obtenemos:

$$x + (z + y) = (x + y) + z;$$

en virtud de la ley conmutativa, ya deducida en (I), en esta fórmula se podrá reemplazar «$z + y$» por «$y + z$», obteniéndose el Axioma 5'':

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Para facilitar la deducción de los Axiomas 3'' y 7'', mostraremos primero de qué manera pueden deducirse algunos de los teoremas y axiomas indicados en los capítulos anteriores a partir del Sistema $\mathcal{U}'''$.

(III) *El Teorema* 1 *puede ser derivado del Sistema* $\mathcal{U}'''$.

Basta observar que la demostración del Teorema 1 expuesta en la Sección 44 se apoya exclusivamente en el Axioma 2, que, por su parte, coincide con el Axioma 2''' del Sistema $\mathcal{U}'''$.

(IV) *El Axioma* 6 *puede ser derivado del Sistema* $\mathcal{U}'''$.

Hemos visto en la Sección 55 que el Axioma 6 se podía deducir de los Axiomas 7, 8 y 9. Los Axiomas 7 y 8 coinciden respectivamente con los Axiomas 4'' y 5'', y podrán demostrarse, por lo tanto en virtud de (I) y (II), de los axiomas del Sistema $\mathcal{U}'''$. El Axioma 9 aparece en el Sistema $\mathcal{U}'''$ como Axioma 4'''. Por consiguiente, el Axioma 6 será deducible del Sistema $\mathcal{U}'''$.

(V) *El Teorema* 11 *puede ser derivado del Sistema* $\mathcal{U}'''$.

En la segunda demostración del Teorema 11, como fue indicada en la Sección 49, usamos solamente los Axiomas 7, 8 y 9. El teorema considerado se podrá, pues, deducir del Sistema $\mathcal{U}'''$ por las mismas razones que el Axioma 6; véase (IV).

(VI) *El Teorema* 12 *puede ser derivado del Sistema* $\mathcal{U}'''$.

Supongamos que la hipótesis del Teorema 12 sea válida:

$$x + y < x + z;$$

y apliquemos el Axioma 5''', reemplazando en él «x», «y» y «t» por «y», «x» y «z», respectivamente. Se sigue que una de las fórmulas:

$$x < x \quad \text{o} \quad y < z$$

debe ser válida; la primera posibilidad debe ser rechazada puesto que contradice el Teorema 1 que, como ya se ha mostrado, es derivable en el Sistema $\mathcal{U}'''$; cf. (III). Por lo tanto, la conclusión del Teorema 12 debe ser válida:

$$y < z.$$

(VII) *El Axioma 3'' puede ser derivado del Sistema $\mathcal{U}'''$.*

Asumamos las hipótesis del Axioma 3'', esto es, las fórmulas:

(1) $$x < y$$

e

(2) $$y < z.$$

Si fuese:

$$y + x = y + z,$$

de acuerdo con el Teorema 11, que ya ha sido demostrado en (V), tendríamos:

$$x = z.$$

Podríamos, pues, sustituir «x» por «z» en (1) y llegar con ello a:

$$z < y.$$

Esta conclusión debe rechazarse, porque, en virtud del Axioma 2''', contradice la desigualdad (2). Así tenemos:

(3) $$y + x \neq y + z.$$

Como $y + x$ e $y + z$ son números (Axioma 6), en virtud del Axioma 1''' se deduce de (3) que una de las siguientes fórmulas debe valer:

(4) $$y + x < y + z \quad o \quad y + z < y + x.$$

En la segunda de las fórmulas (4), podemos, en virtud del Axioma 4'', ya deducido antes, sustituir «$y + x$» por «$x + y$»; así llegamos a:

$$y + z < x + y.$$

Ahora aplicamos a la última fórmula el Axioma 5''', donde reemplazamos «y», «x» e «y» en los lugares de «x», «y» y «t», respectivamente. Llegamos de esta manera a la siguiente consecuencia:

$$y < x \quad o \quad z < y;$$

pero esta consecuencia debe rechazarse, pues en virtud del Axioma 2''', ella contradice las fórmulas (1) y (2) que constituyen las hipótesis del Axioma 3''. Volvemos, por lo tanto, a la primera de las fórmulas (4), y aplicamos el Teorema 12, que, según hemos visto en (VI), es derivable, con «x» reemplazado por «y», y recíprocamente; así obtenemos:

$$x < z,$$

es decir, la conclusión del Axioma 3'''.

(VIII) *El Axioma 7'' puede ser derivado del Sistema $\mathcal{U}'''$.*

La manera de razonar es análoga a la precedente, si bien bastante más sencilla. Supondremos la hipótesis del Axioma 7'':

(1) $$y < z.$$

Si fuese:

$$x + y = x + z,$$

se seguiría del Teorema 11 que:

$$y = z;$$

entonces en (1) podríamos reemplazar «y» por «z» y así llegaríamos a una contradicción con el teorema 1 que ya ha sido derivado en (III). Valdrá, por lo tanto:

$$x + y \neq x + z,$$

de donde se deduce por el Axioma 1''':

$$(2) \qquad x + y < x + z \quad o \quad x + z < x + y.$$

En virtud del Teorema 12, la segunda de estas desigualdades nos da:

$$z < y,$$

lo que contradice nuestra hipótesis (1) en virtud del Axioma 2'''. Debemos, pues, admitir la primera de las desigualdades (2):

$$x + y < x + z,$$

que es precisamente la conclusión del Axioma 7''.*

Hemos visto de esta manera que todas las proposiciones del Sistema $\mathcal{U}''$ se pueden inferir del Sistema $\mathcal{U}'''$ y recíprocamente; con ello LOS SISTEMAS $\mathcal{U}''$ Y $\mathcal{U}'''$ SON, EFECTIVAMENTE, EQUIVALENTES.

El Sistema $\mathcal{U}'''$ es indudablemente más sencillo que el $\mathcal{U}''$ y, por lo tanto, más sencillo aún que los Sistemas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$. Es particularmente interesante la comparación entre los Sistemas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'''$; a causa de las sucesivas reducciones que hemos llevado a cabo, el número original de axiomas se ha reducido en más de la mitad. Por otra parte, debe advertirse que algunas proposiciones del Sistema $\mathcal{U}'''$ (a saber, los Axiomas 3''' y 5''') tienen un carácter menos natural que los axiomas de los restantes sistemas y las demostraciones de algunos teoremas aún muy elementales resultan aquí relativamente más difíciles y complicadas que sobre la base de los otros sistemas.

Lo mismo que un sistema de axiomas, un sistema de términos primitivos puede reemplazarse también por otro sistema equivalente. Esto afecta en particular al sistema de los tres términos «N», «<» y «+» que intervienen como únicos términos primitivos en los axiomas considerados últimamente. Si, por ejemplo, en este sistema se sustituye el símbolo «<» por «≤», obtendremos un sistema equivalente, ya que el segundo de dichos símbolos se

podía definir en términos del primero y el Teorema 8 nos dice que el primero es definible en términos del segundo. Tal transformación del sistema de términos primitivos no ofrece ninguna ventaja; en especial, no aporta nada a la simplificación de los axiomas, pudiendo parecer al lector, más acostumbrado quizá al uso del símbolo «<» que al del símbolo «⩽», algo artificial. Se puede obtener otro sistema equivalente reemplazando el símbolo «+» por «—»; pero tampoco esta transformación sería ventajosa. Para concluir debemos señalar que se conocen otros sistemas de términos primitivos, equivalentes a los que hemos tratado, compuestos solamente por dos términos.

59. El problema de consistencia de la teoría construida

Trataremos ahora brevemente otros problemas metodológicos concernientes al fragmento de aritmética considerado más arriba; éstos son los problemas de consistencia y de completidad (cf. Sección 41). Como es irrelevante referirnos a uno u otro de los sistemas equivalentes considerados, nos referiremos siempre al Sistema $\mathcal{V}$.

Si creemos en la consistencia de toda la aritmética (hipótesis que hemos asumido previamente y que asumiremos nuevamente en nuestras consideraciones posteriores), entonces con más razón debemos aceptar que:

La teoría matemática basada en el Sistema $\mathcal{V}$ es consistente.

Pero mientras que los intentos de demostrar rigurosamente la consistencia de toda la aritmética han tropezado con dificultades esenciales (cf. Sección 41), una demostración de este tipo para el Sistema $\mathcal{V}$ no sólo es posible, pero inclusive relativamente simple. Una razón para esto es el hecho de que la variedad de teoremas que pueden derivarse del sistema de axiomas $\mathcal{V}$ es realmente muy pequeña; por ejemplo, es imposible contestar en base a este sistema una pregunta tan elemental como la de si existen números. Esta circunstancia facilita considerablemente la demostración de que el fragmento de aritmética considerado no contiene ningún par de teoremas contradictorios. Sin embargo, sería completa-

mente imposible con los medios a nuestra disposición esbozar la demostración de consistencia o aun tratar de dar al lector la idea fundamental de la misma; esto requeriría un conocimiento mucho más profundo de lógica y, como trabajo preliminar, sería necesario reconstruir la parte en cuestión de la aritmética como teoría deductiva formalizada (cf. Sección 40). Puede agregarse que si enriquecemos el Sistema $\mathcal{V}$ con una sola proposición que afirme la existencia de al menos dos números distintos, entonces el intento de probar la consistencia del sistema axiomático así ampliado encontraría las mismas dificultades que en el caso del sistema para la totalidad de la aritmética.

60. El problema de completidad de la teoría construida

En comparación con el problema de consistencia, el problema de completidad del Sistema $\mathcal{V}$ puede ser tratado mucho más fácilmente.

Existen numerosos problemas formulados exclusivamente en términos lógicos y términos primitivos del Sistema $\mathcal{V}$ que no pueden decidirse sobre la base de este sistema. En el párrafo anterior hemos tratado precisamente uno de tales problemas. Otro ejemplo lo constituye el enunciado según el cual para todo número x existe un número y tal que

$$x = y + y.$$

Sobre la base de los axiomas del Sistema $\mathcal{V}$, no es posible ni demostrar ni refutar está proposición; resulta esto de la siguiente consideración. Con el símbolo «**N**» designamos el conjunto de todos los números reales; el conjunto **N** comprende, pues, tanto los números enteros como los fraccionarios, tanto los racionales como los irracionales. Pero es fácil ver que ninguno de los axiomas del Sistema $\mathcal{V}$, y por lo tanto ninguno de los teoremas deducibles del mismo, pierden su validez si designamos con el símbolo «**N**» el conjunto de todos los números enteros (positivos y negativos incluyendo el 0) o el conjunto de todos los números racionales; todas estas proposiciones conservarían su validez si la palabra «*número*» significase «*número entero*» o «*número racional*». En el

primer caso la proposición indicada, según la cual para todo número existiría otro igual a su mitad, sería falsa, y en el segundo, en cambio, sería verdadera. Si lográramos demostrar esta proposición en base al Sistema $\mathcal{V}$, llegaríamos con ello a una contradicción en la aritmética de los números enteros; en cambio, si pudiésemos refutarla, llegaríamos a una contradicción en la aritmética de los números racionales.

El argumento que acabamos de esbozar pertenece a la categoría de las demostraciones por interpretación (cf. Secciones 37 y 56); para aclararlo lo reformularemos ligeramente. Designemos por «**I**» el conjunto de todos los números enteros y con «**R**» el de los racionales. Daremos ahora dos interpretaciones aritméticas del Sistema $\mathcal{V}$ en las que los símbolos «$<$», «$>$» y «$+$» conserven la misma interpretación conocida, y el símbolo «**N**», en cambio, que explícita o implícitamente interviene en todos los axiomas, será reemplazado en la primera interpretación por «**I**», y por «**R**» en la segunda. (Dejaremos de lado aquí las observaciones hechas en la Sección 43 sobre la posible eliminación del símbolo «**N**», ya que esto complicaría ligeramente nuestro razonamiento.) Todos los axiomas del Sistema $\mathcal{V}$ conservan su validez en ambas interpretaciones; en cambio, la proposición:

para todo número x existe un número y tal que

$$x = y + y,$$

sólo se satisface en la segunda interpretación, mientras que en la primera, por el contrario, es válida su negación:

no para todo número x existe un número y tal que

$$x = y + y.$$

Bajo la hipótesis de la consistencia de la aritmética, de la primera interpretación se concluye que la proposición considerada no es demostrable en base al Sistema $\mathcal{V}$, y de la segunda, que dicha proposición tampoco es refutable.

Hemos demostrado así que existen dos proposiciones contradictorias, formuladas exclusivamente en términos lógicos y tér-

minos primitivos de la teoría matemática considerada, ninguna de las cuales puede deducirse del sistema de axiomas de tal teoría. En consecuencia, tenemos:

La teoría matemática basada en el Sistema $\mathcal{V}$ es incompleta.

Ejercicios

1. Convengamos que la fórmula:

$$x <\cdot y$$

significa lo mismo que:

$$x + 1 < y.$$

Sustituyamos en los axiomas del Sistema $\mathcal{V}''$ de la Sección 57 el símbolo «$<$» por «$<\cdot$». Determínese cuáles axiomas conservan su validez y cuáles no y conclúyase así que el Axioma 1'' no es deducible de los restantes. ¿Cómo se llama el método de inferencia usado aquí?

2. Siguiendo las líneas de la demostración de independencia esbozada en la Sección 56 para el Axioma 2', mostrar que el Axioma 2'' no es deducible de los restantes axiomas del Sistema $\mathcal{V}''$.

3. Designemos por el símbolo «$\mathring{N}$» el conjunto compuesto por los números 0, 1 y 2. Definamos la relación $\mathring{<}$ entre los elementos de dicho conjunto, estipulando que tal relación rige solamente en los tres casos siguientes:

$$0 \mathring{<} 1, \quad 1 \mathring{<} 2, \quad 2 \mathring{<} 0.$$

Definamos además la operación $\mathring{+}$ con los elementos del conjunto $\mathring{N}$ mediante las fórmulas siguientes:

$$0 \mathring{+} 0 = 1 \mathring{+} 2 = 2 \mathring{+} 1 = 0,$$
$$0 \mathring{+} 1 = 1 \mathring{+} 0 = 2 \mathring{+} 2 = 1,$$
$$0 \mathring{+} 2 = 1 \mathring{+} 1 = 2 \mathring{+} 0 = 2.$$

En los axiomas del Sistema $\mathcal{U}''$, reemplácense los términos primitivos por «$\mathring{N}$», «$\mathring{<}$» y «$\mathring{+}$», respectivamente (y la palabra «*número*» por la expresión «*uno de los tres números* 0, 1 *y* 2»); mostrar de este modo que el Axioma 3'' no se puede deducir de los restantes.

4. Para demostrar mediante una interpretación que el Axioma 4'' no es deducible de los restantes axiomas del Sistema $\mathcal{U}''$ basta sustituir en todos ellos el símbolo de adición por el símbolo de una de las cuatro operaciones mencionadas en el Ejercicio 3 del Capítulo VIII. Averiguar cuál de dichas operaciones es la que debe ser usada.

5. Consideremos la operación «$\oplus$» que satisface a la fórmula:

$$x \oplus y = 2 \cdot (x + y).$$

Mostrar con ayuda de ella, que el Axioma 5'' no puede deducirse de los restantes axiomas del Sistema $\mathcal{U}''$.

6. Construir un conjunto de números tal que junto a la relación $<$ y a la operación $+$, no satisfaga el Axioma 6'', pero sea un modelo para los restantes axiomas del Sistema $\mathcal{U}''$. ¿Qué consecuencia se puede extraer de aquí relativa a la deducibilidad del Axioma 6''?

7. Para mostrar que el Axioma 7'' no puede demostrarse sobre la base de los restantes axiomas del Sistema $\mathcal{U}''$, pueden sustituirse en todos ellos dos de los términos primitivos de este sistema, por los correspondientes símbolos introducidos en el Ejercicio 3, dejando invariable el tercer término primitivo. Determinar qué término debe permanecer inalterado.

8. Los resultados obtenidos en los Ejercicios 1-7, muestran que ninguno de los axiomas del Sistema $\mathcal{U}''$ puede deducirse de los restantes. Llevar a cabo demostraciones de independencia análogas para los axiomas del Sistema $\mathcal{U}'$ de la Sección 55 y el Sistema $\mathcal{U}'''$ de la Sección 58 (usando, en parte, las interpretaciones aplicadas en los ejercicios anteriores).

9 Mostrar en base al sistema de axiomas $\mathcal{V}''$ que, todo conjunto de números que constituya un grupo abeliano respecto de la adición, es al mismo tiempo un grupo abeliano ordenado respecto de la relación *menor que* y de la operación de adición. Indicar ejemplos de tales conjuntos de números.

10. En el Ejercicio 5 del Capítulo VIII, expusimos ejemplos de conjuntos numéricos que constituían grupos abelianos respecto de la multiplicación. ¿Cuáles de dichos conjuntos son grupos abelianos ordenados respecto de la relación *menor que* y de la operación de multiplicación, y cuáles no?

11. Usar el resultado obtenido en el Ejercicio 10 para dar una nueva demostración de la independencia del Axioma 7″ de los restantes axiomas del Sistema $\mathcal{V}''$ (cf. Ejercicio 7).

*12. Demostrar el siguiente teorema sobre la base del sistema de axiomas $\mathcal{V}''$:

si existen por lo menos dos números distintos, entonces para todo número x existe un número y tal que $x < y$.

Generalizando este resultado, demostrar el siguiente teorema general de la teoría de grupos:

si la clase K es un grupo abeliano ordenado respecto de la relación R y de la operación O, y si K tiene al menos dos elementos, entonces para todo elemento x de K existe un elemento y de K, tal que $x\,R\,y$.

Demostrar haciendo uso de este teorema, que ninguna clase que sea un grupo abeliano ordenado puede constar de dos, tres, ... elementos; ¿puede constar de uno solo? (Véase el Ejercicio 8 del Capítulo VIII.)

*13. Mostrar que el sistema de Axiomas 1″-3″ (de la Sección 57) es equivalente al sistema compuesto por el Axioma 1′ y la proposición siguiente:

si $x < y$, $y < z$, $z < t$, $t < u$ y $u < v$, entonces $v \nless x$.

Generalizando este resultado, demostrar el siguiente teorema de la teoría de relaciones:

para que una clase K sea ordenada por la relación R, es necesario y suficiente que dicha relación, además de ser conexa en K, cumpla la condición siguiente:

si x, y, z, t, u y v son elementos cualesquiera de K, y xRy, yRz, zRt, tRu y uRv, entonces no es el caso que vRx.

*14. Usando los consideraciones de las Secciones 48, 55 y 58, mostrar que los tres sistemas de proposiciones siguientes son equivalentes:

(a) el sistema de los Axiomas 6-9 de la Sección 47;
(b) el sistema de los Axiomas 4''-6'' de la Sección 57;
(c) el sistema de los Axiomas 3''' y 4''' de la Sección 58.

Como generalización de este resultado, formular nuevas definiciones de la expresión:

la clase K es un grupo abeliano respecto de la operación O,

que resulten equivalentes pero más simples que la formulada en la Sección 47; escríbanse las definiciones en símbolos (cf. Ejercicio *29, en pág. 232).

*15. Consideremos el siguiente sistema $\mathcal{V}''''$ compuesto por los axiomas:

Axioma 1''''. *Si $x \neq y$, entonces $x < y$ o $y < x$.*

Axioma 2''''. *Si $x < y$, $y < z$, $z < t$, $t < u$ y $u < v$, entonces $v \nless x$.*

Axioma 3''''. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Axioma 4''''. *Para números cualesquiera x e y existe un número z tal que $x = y + z$.*

Axioma 5''''. *Si $y < z$, entonces $x + y < x + z$.*

Usando los resultados de los Ejercicios 13 y 14, mostrar que el Sistema $\mathcal{V}''''$ es equivalente a cada uno de los Sistemas $\mathcal{V}''$ y $\mathcal{V}'''$.

16. En la Sección 58 afirmamos que el sistema de los términos primitivos «N», «$<$» y «$+$» es equivalente al de los términos «N», «$\leqslant$» y «$+$»; en realidad a esta afirmación deberíamos añadir que estos sistemas son equivalentes con respecto a un determinado sistema de proposiciones, por ejemplo, con respecto al Sistema $\mathcal{V}'''$ de la Sección 58 y la Definición 1 de la Sección 46. Explicar por qué es necesaria tal aclaración. Dicho en general: ¿por qué es necesario referirse siempre a un determinado sistema de proposiciones, cuando queremos establecer la equivalencia de dos sistemas de términos (en el sentido de la Sección 39)?

*17. Consideremos el Sistema $\mathcal{V}'''''$ compuesto por los siete axiomas siguientes:

AXIOMA 1'''''. *Para números cualesquiera x e y, tenemos:* $x \leqslant y$ *o* $y \leqslant x$.

AXIOMA 2'''''. *Si* $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant x$, *entonces* $x = y$.

AXIOMA 3'''''. *Si* $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant z$, *entonces* $x \leqslant z$.

AXIOMA 4'''''. $x + y = y + x$.

AXIOMA 5'''''. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AXIOMA 6'''''. *Para números cualesquiera x e y, existe un número z tal que* $x = y + z$.

AXIOMA 7'''''. *Si* $y \leqslant z$, *entonces* $x + y \leqslant x + z$.

Mostrar que los sistemas de axiomas $\mathcal{V}''$ (de la Sección 57) y $\mathcal{V}'''''$ se convierten en sistemas de proposiciones equivalentes agregando al primero de éstos la Definición 1 de la Sección 46 y al segundo el Teorema 8 de la Sección 46, considerando dicho teorema como definición del símbolo «$<$». ¿Por qué no puede decirse simplemente, que los Sistemas $\mathcal{V}'''''$ y $\mathcal{V}''$ son equivalentes?

18. Tomando como ejemplo los argumentos de la Sección 60, mostrar que con el sistema de axiomas $\mathcal{U}$, la proposición siguiente no puede demostrarse ni refutarse:

si $x < z$, *entonces existe un número* y *tal que* $x < y$ *e* $y < z$.

*19. Mostrar que sobre la base del sistema de axiomas $\mathcal{U}$, la siguiente proposición no puede demostrarse ni refutarse:

$$\underset{x}{\mathsf{A}}\ \underset{y,z}{\mathsf{E}}\ [(y < x) \wedge (x < z)].$$

*20. En el presente capítulo hemos empleado el método de demostración por interpretación para establecer la independencia o la incompletidad de un sistema de axiomas. Este mismo método se usa también en las investigaciones sobre consistencia. En efecto, tenemos a nuestra disposición la siguiente ley metodológica que es consecuencia de la ley de deducción:

Si la teoría deductiva $\mathfrak{S}$ *tiene una interpretación en la teoría deductiva* $\mathfrak{T}$ *y la teoría* $\mathfrak{T}$ *es consistente, entonces la teoría* $\mathfrak{S}$ *es también consistente.*

Mostrar que este enunciado es correcto. En la Sección 38 se han hecho varias observaciones sobre posibles interpretaciones de la aritmética y la geometría; aplicando la ley que acabamos de enunciar, deducir de estas observaciones consecuencias sobre la consistencia de la aritmética y la geometría y su relación con la consistencia de la lógica.

X

EXTENSIÓN DE LA TEORÍA CONSTRUIDA

FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS REALES

61. Primer sistema de axiomas para la aritmética de los números reales

El sistema de axiomas $\mathcal{V}$ es insuficiente para fundamentar toda la aritmética de los números reales, ya que —según hemos visto en la Sección 60— numerosos teoremas de esta disciplina no pueden ser deducidos de los axiomas de este sistema, y además, por otro motivo no menos importante e, incidentalmente, bastante análogo: puede mostrarse una serie de conceptos del campo de la aritmética no definibles con ayuda de los términos primitivos del Sistema $\mathcal{V}$. Así, el Sistema $\mathcal{V}$ no nos permite definir los símbolos de multiplicación y de división, ni siquiera símbolos tales como «1», «2», etc.

Surge inmediatamente la cuestión de cómo podemos transformar o complementar nuestro sistema de axiomas y términos primitivos de modo de lograr una base suficiente para construir toda la aritmética de los números reales. Este problema puede ser solucionado de varias maneras. Esbozaremos aquí dos métodos diferentes de solución[1].

---

[1] El primer sistema de axiomas para toda la aritmética de los números reales fue publicado en el año 1900 por HILBERT; este sistema está relacionado con el sistema $\mathcal{V}^{\dagger\dagger}$, que veremos más adelante. Antes de 1900 ya se conocían otros sistemas de axiomas

En el caso del primer método, elegiremos como punto de partida el Sistema $\mathcal{U}'''$ (véase Sección 58); a los términos primitivos de este sistema, agregaremos la palabra «*uno*», que como de costumbre, sustituiremos por el símbolo «1» y complementaremos los axiomas con cuatro nuevas proposiciones; así obtendremos un nuevo SISTEMA $\mathcal{U}^{\dagger}$ que contendrá los cuatro términos primitivos «$\mathbf{N}$», «$<$», «$+$» y «1» y constará de los nueve axiomas que transcribimos explícitamente:

AXIOMA 1†. *S* $x \neq y$, *entonces* $x < y$ *o* $y < x$.

AXIOMA 2†. *Si* $x < y$, *entonces* $y \nless x$.

AXIOMA 3†. *Si* $x < z$, *entonces existe un número* y *tal que* $x < y$ *e* $y < z$.

AXIOMA 4†. *Si* K *y* L *son conjuntos arbitrarios de números* (es decir, *si* $K \subset \mathbf{N}$ *y* $L \subset \mathbf{N}$), *que satisfacen la condición:*

para todo x *perteneciente a* K *y todo* y *perteneciente a* L, *tenemos:* $x < y$,

entonces existe un número z *que satisface la siguiente condición:*

si x *es un elemento cualquiera de* K *e* y *un elemento cualquiera de* L, *y si* $x \neq z$ *e* $y \neq z$, *entonces* $x < z$ *y* $z < y$.

AXIOMA 5†. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

AXIOMA 6†. *Para números cualesquiera* x *e* y, *existe un número* z *tal que* $x = y + z$.

AXIOMA 7†. *Si* $x + z < y + t$, *entonces* $x < y$ *o* $z < t$.

AXIOMA 8†. $1 \in \mathbf{N}$.

AXIOMA 9†. $1 < 1 + 1$.

---

para fragmentos más restringidos de la aritmética; el primero de éstos, relativo a la aritmética de los números naturales, fue publicado por PEANO (cf. nota 1 de la pág. 152) en el año 1889. Varios sistemas de axiomas para la aritmética y varias partes de ella —en particular, el primer sistema axiomático para la aritmética de los números complejos— fueron publicados por HUNTINGTON (cf. nota 1 en la pág. 174).

62. Caracterización más detenida del primer sistema de axiomas; sus ventajas metodológicas y desventajas didácticas

Los axiomas expuestos en la sección anterior se dividen en tres grupos. En el primero, compuesto por los Axiomas 1†-4†, aparecen sólo dos términos primitivos, «N» y «<»; en el segundo, al que pertenecen los Axiomas 5†-7†, además de los anteriores aparece también el símbolo «+», y finalmente en el tercer grupo, compuesto por los Axiomas 8† y 9†, figura además el símbolo «1».

Entre los axiomas del primer grupo, encontramos dos que hasta ahora no conocíamos: los Axiomas 3† y 4†. El Axioma 3† recibe el nombre de LEY DE DENSIDAD para la relación *menor que;* expresa que dicha relación es densa en el conjunto de todos los números. En general, decimos que una relación R es DENSA EN LA CLASE K, si para dos elementos cualesquiera x e y de dicha clase, la fórmula:

$$x\,R\,y$$

implica siempre la existencia de un elemento z de la clase K tal que

$$x\,R\,z \quad \text{y} \quad z\,R\,y.$$

El Axioma 4† se denomina LEY DE CONTINUIDAD para la relación *menor que* o AXIOMA DE CONTINUIDAD, o tambien AXIOMA DE DEDEKIND[1]; si queremos establecer de un modo general las condiciones bajo las cuales la relación R se denomina CONTINUA EN LA CLASE K, bastará reemplazar en el Axioma 4†, «N» por «K» (y como es natural, la palabra «*número*» por la expresión «*elemento de la clase* K»), como también «<» por «R». Si, en particular, la clase K está ordenada por la relación R y ésta es densa o continua en K, diremos que K está ORDENADA DENSAMENTE u ORDENADA CONTINUAMENTE, respectivamente.

El Axioma 4† es menos evidente y más complicado que los restantes; se diferencia de ellos en que no sólo intervienen en él

---

[1] Este axioma fue enunciado, de manera algo más complicada, por el matemático alemán R. DEDEKIND (1831-1916), cuyas investigaciones han aportado mucho a la fundamentación de la aritmética, y sobre todo a la teoría de los números irracionales.

números individuales, sino conjuntos de ellos. Para darle a este axioma una forma más simple y comprensible, será conveniente formular las siguientes definiciones:

Decimos que el conjunto de números K PRECEDE *al conjunto L si, y sólo si, todo número de K es menor que todo número de L.*

Decimos que el número z SEPARA *los conjuntos numéricos K y L si, y sólo si, para dos elementos cualesquiera x de K e y de L, ambos distintos de z, tenemos:* $x < z$ *y* $z < y$.

En base a estas definiciones el axioma de continuidad se puede formular de una manera muy sencilla:

Si un conjunto de números precede a otro, entonces existe al menos un número que separe dichos conjuntos.

Todos los axiomas del segundo grupo son conocidos para nosotros por consideraciones anteriores. Los del tercer grupo, aunque nuevos, son de un contenido tan simple y obvio que apenas necesitan explicación. Basta observar que si antepusiéramos al Axioma 9† las definiciones del símbolo «0» y de la expresión «*número positivo*», éste podría reemplazarse por la fórmula:

$$0 < 1$$

o por la proposición:

1 *es un número positivo.*

Los Axiomas 1†, 2†, 5†, 6† y 7† constituyen exactamente lo que hemos llamado Sistema $\mathcal{U}'''$, que lo mismo que su equivalente $\mathcal{U}''$, caracteriza el conjunto de todos los números como un grupo abeliano ordenado (véase Sección 57). Si tenemos en cuenta el contenido de los Axiomas 3†, 4†, 8† y 9†, agregados en último término, el sistema completo podrá caracterizarse de la siguiente manera:

El Sistema $\mathcal{U}^\dagger$ *expresa el hecho de que el conjunto de todos los números es un grupo abeliano ordenado de manera densa y continua*

respecto de la relación $<$ *y de la operación de adición, y distingue en dicho conjunto un cierto elemento positivo* 1.

Desde el punto de vista metodológico el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$ posee varias ventajas. Es en apariencia el más sencillo de todos los sistemas conocidos que proporcionan una base suficiente para la fundamentación de toda la aritmética. Exceptuado el Axioma $1^{\dagger}$, que puede deducirse de los restantes (aunque no de un modo sencillo), todos los otros axiomas del sistema, como asimismo los términos primitivos que intervienen en ellos, son independientes entre sí. El valor didáctico del sistema considerado es, en cambio, incomparablemente menor porque la sencillez de los fundamentos origina importantes complicaciones en la construcción ulterior. La definición de multiplicación, sin ir más lejos, y la deducción de las leyes fundamentales para esta operación no se puede llevar a cabo con facilidad. Casi desde el principio hay que utilizar esencialmente en los argumentos el axioma de continuidad (sin su ayuda, por ejemplo, no se podría demostrar en el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$ la existencia del número $^{1}/_{2}$, es decir, un número y tal que $y + y = 1$) y las inferencias basadas en este axioma ofrecen de ordinario al principiante dificultades considerables.

63. Segundo sistema de axiomas para la aritmética de los números reales

Por las razones expuestas, vale la pena buscar otro sistema de axiomas sobre el que se pueda construir la aritmética. Un tal sistema puede obtenerse de la manera siguiente. Tomaremos como punto de partida el sistema $\mathcal{U}''$. Se adoptarán tres nuevos términos primitivos, a saber: «*cero*», «*uno*» y «*producto*»; como de costumbre, reemplazaremos los dos primeros términos por los símbolos «0» y «1», y en el lugar de la expresión «*el producto de los números* (o *factores*) x *e* y» (o «*el resultado de la multiplicación de los números* x *e* y»), escribiremos «$x \cdot y$». Además de esto, añadiremos al sistema trece nuevos axiomas; de ellos conocemos ya dos, el axioma de continuidad y la ley de realizabilidad de la adición. En definitiva llegamos de este modo al sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$, compuesto por

seis términos primitivos: «N», «<», «+», «0», «·» y «1», y por las veinte proposiciones siguientes:

AXIOMA 1††. *Si* $x \neq y$, *entonces* $x < y$ *o* $y < x$.

AXIOMA 2††. *Si* $x < y$, *entonces* $y \not< x$.

AXIOMA 3††. *Si* $x < y$ *e* $y < z$, *entonces* $x < z$.

AXIOMA 4††. *Si K y L son conjuntos cualesquiera de números que satisfacen la condición:*

para todo x perteneciente a K y todo y perteneciente a L, tenemos: $x < y$,

entonces existe un número z que satisface la condición:

si x es un elemento cualquiera de K e y un elemento cualquiera de L, y si $x \neq z$ *e* $y \neq z$, *entonces* $x < z$ *y* $z < y$.

AXIOMA 5††. *Para números cualesquiera y, z, existe un número x tal que* $x = y + z$ (en otras palabras: *si* $y \in \mathbf{N}$ *y* $z \in \mathbf{N}$, *entonces* $y + z \in \mathbf{N}$).

AXIOMA 6††. $x + y = y + x$.

AXIOMA 7††. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AXIOMA 8††. *Para números cualesquiera x e y, existe un número z tal que* $x = y + z$.

AXIOMA 9††. *Si* $y < z$, *entonces* $x + y < x + z$.

AXIOMA 10††. $0 \in \mathbf{N}$.

AXIOMA 11††. $x + 0 = x$.

AXIOMA 12††. *Para números cualesquiera y, z, existe un número x tal que* $x = y \cdot z$ (en otras palabras: *si* $y \in \mathbf{N}$ *y* $z \in \mathbf{N}$, *entonces* $y \cdot z \in \mathbf{N}$).

AXIOMA 13††. $x \cdot y = y \cdot x$.

AXIOMA 14††. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

AXIOMA 15††. *Para números cualesquiera x e y, si* $y \neq 0$, *entonces existe un número z tal que* $x = y \cdot z$.

AXIOMA 16††. *Si* $0 < x$ *e* $y < z$, *entonces* $x \cdot y < x \cdot z$.

AXIOMA $17^{\dagger\dagger}$. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

AXIOMA $18^{\dagger\dagger}$. $1 \in \mathbf{N}$.

AXIOMA $19^{\dagger\dagger}$. $x \cdot 1 = x$.

AXIOMA $20^{\dagger\dagger}$. $0 \neq 1$.

64. Caracterización más detenida del segundo sistema de axiomas; conceptos de cuerpo y de cuerpo ordenado [1]

En el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$, lo mismo que en el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$, podemos distinguir tres grupos de axiomas. En los Axiomas $1^{\dagger\dagger}$-$4^{\dagger\dagger}$, integrantes del primero, sólo intervienen los dos términos primitivos «N» y «$<$»; en el segundo, compuesto por los Axiomas $5^{\dagger\dagger}$-$11^{\dagger\dagger}$, aparecen además otros dos símbolos: el signo de adición «$+$» y el símbolo «0»; finalmente, en el tercer grupo, formado por los Axiomas $12^{\dagger\dagger}$-$20^{\dagger\dagger}$, desempeñan el papel más importante el símbolo de multiplicación «$\cdot$» y el símbolo «1».

Todos los axiomas de los dos primeros grupos, con excepción de $10^{\dagger\dagger}$ y $11^{\dagger\dagger}$ son ya conocidos. Los Axiomas $10^{\dagger\dagger}$ y $11^{\dagger\dagger}$ juntos establecen que 0 es un elemento unidad (a derecha) de adición. En general, se dice que u es un ELEMENTO UNIDAD A DERECHA O A IZQUIERDA DE LA OPERACIÓN O EN LA CLASE K, si u pertenece a K y si todo elemento x de K satisface la fórmula:

$$x \, O \, u = x, \quad \text{o} \quad u \, O \, x = x,$$

respectivamente. Si u es al mismo tiempo un elemento unidad a derecha y a izquierda, entonces es llamado simplemente ELEMENTO UNIDAD DE LA OPERACIÓN O EN LA CLASE K; resulta claro que en el caso de una operación conmutativa O, todo elemento unidad a derecha o a izquierda és simplemente un elemento unidad.

---

[1] En el álgebra moderna han proliferado con extraordinaria abundancia palabras que sirven de nombre a las diversas estructuras de que se ocupa ésta; de este modo, no es habitual que los autores coincidan en la nomenclatura que usan. Existen varios nombres para una misma estructura algebraica y a veces un mismo nombre es usado por diferentes matemáticos con sentidos también diferentes. Así, las estructuras que en este libro aparecen designadas por la palabra «cuerpo» se denotan frecuentemente con la palabra «campo». *(N. del T.)*

En los tres primeros axiomas del tercer grupo, esto es, en los Axiomas $12^{\dagger\dagger}$ a $14^{\dagger\dagger}$, reconocemos las LEYES DE REALIZABILIDAD, CONMUTATIVIDAD y ASOCIATIVIDAD de la multiplicación; éstas corresponden exactamente a los Axiomas $5^{\dagger\dagger}$-$7^{\dagger\dagger}$. Los Axiomas $15^{\dagger\dagger}$ y $16^{\dagger\dagger}$ se llaman LEY DE INVERTIBILIDAD A DERECHA para la multiplicación y LEY DE MONOTONÍA de la multiplicación con respecto a la relación *menor que*. Estos axiomas corresponden a las leyes de invertibilidad y monotonía de la adición, aunque no exactamente. La diferencia reside en el hecho de que sus hipótesis contienen las condiciones restrictivas «$y \neq 0$» y «$0 < x$»; a pesar de sus nombres, por lo tanto, no nos permiten afirmar simplemente que la multiplicación es invertible, o que es monótona con respecto a la relación $<$ (en el sentido de las Secciones 47 y 49).

El Axioma $17^{\dagger\dagger}$ establece una conexión fundamental entre la adición y la multiplicación; es la llamada LEY DISTRIBUTIVA (o, estrictamente hablando, LEY DE DISTRIBUTIVIDAD A DERECHA) de la multiplicación respecto de la adición. En general, la operación P es llamada DISTRIBUTIVA A DERECHA O A IZQUIERDA RESPECTO A LA OPERACIÓN O EN LA CLASE K si tres elementos cualesquiera x, y, z de la clase K satisfacen la fórmula:

$$x\,P\,(y\,O\,z) = (x\,P\,y)\;O\;(x\,P\,z),$$

$$\text{o} \qquad (x\,O\,y)\,P\,z = (x\,P\,z)\;O\;(y\,P\,z),$$

respectivamente. Si la operación P es conmutativa, las nociones de distributividad, a derecha y a izquierda, coinciden, y decimos simplemente que la operación P es DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA OPERACIÓN O EN LA CLASE K.

Los tres últimos axiomas se refieren al número 1. Los Axiomas $18^{\dagger\dagger}$ y $19^{\dagger\dagger}$ juntos expresan que 1 es un elemento unidad a derecha de la multiplicación. El contenido del Axioma $20^{\dagger\dagger}$ no necesita aclaración; el papel que desempeña este axioma en la construcción de la aritmética es mucho mayor de lo que pudiera parecer en principio, ya que sin él sería imposible mostrar que el conjunto de todos los números es infinito.

La totalidad de las propiedades asignadas a la adición y a la multiplicación por los Axiomas $5^{\dagger\dagger}$-$8^{\dagger\dagger}$, $12^{\dagger\dagger}$-$15^{\dagger\dagger}$ y $17^{\dagger\dagger}$, suelen

resumirse en la afirmación de que estos axiomas establecen que el conjunto **N** es un CUERPO (o, más precisamente, un CUERPO CONMUTATIVO) RESPECTO DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN. Si, además, se tienen en cuenta los axiomas de orden $1^{\dagger\dagger}$-$3^{\dagger\dagger}$ y los axiomas de monotonía $9^{\dagger\dagger}$ y $16^{\dagger\dagger}$, se dice que el conjunto **N** es un CUERPO ORDENADO RESPECTO DE LA RELACIÓN $<$ Y LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN. El lector se dará cuenta fácilmente del modo de extender el concepto de cuerpo, o el de cuerpo ordenado, a clases, operaciones y relaciones arbitrarias. Si aún tenemos en cuenta el axioma de continuidad $4^{\dagger\dagger}$, así como los Axiomas $10^{\dagger\dagger}$, $11^{\dagger\dagger}$ y $18^{\dagger\dagger}$-$20^{\dagger\dagger}$, referentes a los números 0 y 1, el contenido del sistema de axiomas $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ podrá caracterizarse como sigue:

El sistema de axiomas $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ expresa que el conjunto de todos los números es un cuerpo continuamente ordenado respecto de la relación $<$ y las operaciones de adición y multiplicación, y distingue en este conjunto dos elementos diferentes 0 *y* 1, *el primero de los cuales es un elemento unidad de la adición y el segundo un elemento unidad de la multiplicación.*

65. Equivalencia de los dos sistemas de axiomas; desventajas metodológicas y ventajas didácticas del segundo sistema

Los Sistemas $\mathcal{U}^{\dagger}$ y $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ son equivalentes (mejor dicho, lo son si al primero se agrega la definición del símbolo «0», y la del símbolo de multiplicación, formuladas ambas con ayuda de los términos primitivos de dicho sistema). Sin embargo, la demostración de la equivalencia no es fácil. En realidad, la deducción de los axiomas del primer sistema a partir de los del segundo, no ofrece mayor dificultad; pero en lo que a la tarea opuesta se refiere, ya se sigue de nuestras observaciones anteriores que, sobre la base del primer sistema, tanto la definición de multiplicación como la demostración de las leyes básicas referentes a esta operación (que figuran como axiomas en el segundo sistema) presentan dificultades considerables.

En el aspecto metodológico, el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$ aventaja considerablemente al Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$. El número de los axiomas en

este último es más de dos veces mayor. Los axiomas no son independientes entre sí; por ejemplo, los Axiomas $5^{\dagger\dagger}$ y $12^{\dagger\dagger}$, es decir, las leyes de realizabilidad de la adición y la multiplicación, pueden derivarse de los restantes axiomas, o, si se conservan éstos, algunos otros, como los Axiomas $6^{\dagger\dagger}$, $11^{\dagger\dagger}$ y $14^{\dagger\dagger}$ podrán ser eliminados. Tampoco son independientes entre sí los términos primitivos; tres de ellos, a saber: «$<$», «0» y «1», son definibles valiéndose de los restantes (*por ejemplo, en la Sección 53 se indicó una de las posibles definiciones del símbolo «0»*), con lo que el número de axiomas puede ser nuevamente reducido.

De esta manera el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ admite importantes simplificaciones de varios tipos; a consecuencia de estas simplificaciones las ventajas didácticas del mismo se reducen, y éstas eran realmente grandes. Sobre la base del sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ es posible desarrollar sin dificultades las partes más importantes de la aritmética de los números reales: la teoría de las relaciones fundamentales entre números, la teoría de las cuatro operaciones aritméticas elementales: adición, sustracción, multiplicación y división, la teoría de ecuaciones, desigualdades y funciones lineales. Los métodos de inferencia que son aplicados aquí tienen un carácter muy natural y completamente elemental; en particular, el axioma de continuidad no interviene para nada en esta etapa; no entra en juego hasta llegar a la teoría de las tres operaciones aritméticas «superiores»: potenciación, radicación y logaritmación, siendo indispensable para la demostración de la existencia de números irracionales. No parece conocerse otro sistema de axiomas y términos primitivos que ofrezca una base más ventajosa para una construcción elemental y, al mismo tiempo, estrictamente deductiva, de la aritmética de los números reales.

Ejercicios

1. Mostrar que el conjunto de todos los números positivos, la relación $<$, la operación de multiplicación y el número 2 constituyen un modelo para el sistema de axiomas $\mathcal{U}^{\dagger}$ y que, por lo tanto, este sistema posee al menos dos interpretaciones distintas en la aritmética.

2. ¿Cuáles de las relaciones citadas en el Ejercicio 6 del Capítulo V son densas?

*3. ¿Cómo podemos expresar —en el simbolismo del cálculo de relaciones— el hecho de que la relación R es densa (en la clase universal)? ¿Cómo podemos expresar por una ecuación del cálculo de relaciones el hecho de que la relación R es transitiva y densa? (cf. Ejercicio 17 del Capítulo V).

4. ¿Cuáles de los conjuntos numéricos siguientes quedan ordenados densamente mediante la relación $<$:

(a) el conjunto de todos los números naturales,
(b) el conjunto de todos los números enteros,
(c) el conjunto de todos los números racionales,
(d) el conjunto de todos los números positivos,
(e) el conjunto de todos los números distintos de 0?

*5. Para demostrar sobre la base del sistema de axiomas $\mathcal{U}$[†] que el número $^1/_2$ existe, es decir, la existencia de un número z tal que:

$$z + z = 1,$$

razonaremos como sigue. Sea K el conjunto de todos los números x tales que:

$$x + x < 1,$$

y, análogamente, sea L el conjunto de todos los números y tales que:

$$1 < y + y.$$

Demostraremos primeramente que el conjunto K precede al conjunto L. Aplicando ahora el axioma de continuidad obtenemos un número z que separa ambos conjuntos. Mostraremos a continuación que el número z no puede pertenecer al conjunto K (pues, en caso contrario habría en éste un número x que sería mayor

que z) ni tampoco a L, de donde se concluirá que z es el número buscado, esto es, que

$$z + z = 1.$$

Desarróllese en detalle la demostración esbozada.

*6. Generalizando el razonamiento del ejercicio anterior, demostrar sobre la base del Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$ el teorema siguiente:

T. *Para todo número x existe un número y tal que $x = y + y$.*

Compárese el resultado obtenido con las observaciones de la Sección 60.

*7. En el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$, reemplácese el Axioma $3^{\dagger}$ por el Teorema T del ejercicio anterior. Mostrar que el sistema de proposiciones obtenido de esta forma es equivalente al Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$.

Indicación: Para deducir el Axioma $3^{\dagger}$ del sistema modificado, sustitúyase en el Teorema T, «$x + z$» por «x»; en virtud de la hipótesis del Axioma $3^{\dagger}$, podrá mostrarse con facilidad que el número y satisface la conclusión de este axioma.

*8. Usar el método de demostración por interpretación para mostrar que después de suprimir el Axioma $1^{\dagger}$ en el Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$, se obtiene un sistema de axiomas independientes entre sí.

*9. Indicar una interpretación geométrica de los Sistemas $\mathcal{U}^{\dagger}$ y $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ mediante una extensión del Ejercicio 2 del Capítulo VIII.

*10. Escríbanse en simbolismo lógico todos los axiomas de los Sistemas $\mathcal{U}^{\dagger}$ y $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$.

11. ¿Tienen elemento unidad a derecha, a izquierda o simplemente elemento unidad en el conjunto de todos los números, la sustracción, la división y las operaciones mencionadas en el Ejercicio 3 del Capítulo VIII?

¿Poseen las operaciones de adición y multiplicación de conjuntos de puntos elementos unidad en la clase de todos los conjuntos de puntos?

*12. Demostrar que toda operación conmutativa en una clase posee a lo sumo un elemento unidad en ésta. Generalizando el resultado obtenido en el Ejercicio 24 del Capítulo VIII, demostrar el siguiente teorema de la teoría de grupos:

si la clase K es un grupo abeliano respecto de la operación O, entonces dicha operación poseerá exactamente un elemento unidad en la clase K.

13. Consideremos las cinco operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Formular las proposiciones que afirman que cada una de estas operaciones es distributiva a derecha y a izquierda respecto de las demás (en total, habrá cuarenta de dichas proposiciones). ¿Cuáles de ellas son verdaderas?

14. Resolver el mismo problema que en el ejercicio anterior con las cuatro operaciones **A**, **B**, **G** y **K** que introdujimos en el Ejercicio 3 del Capítulo VIII. Mostrar además que toda operación que sea realizable en un conjunto de números será distributiva a izquierda y a derecha en este conjunto, respecto de las operaciones **A** y **B**.

15. ¿Es distributiva la adición de clases respecto de la intersección, y viceversa? (cf. Ejercicio 15 del Capítulo IV).

16. ¿Cuáles de los conjuntos numéricos citados en el Ejercicio 4 son cuerpos ordenados respecto de la relación $<$ y de la adición y multiplicación?

17. Demostrar que el conjunto compuesto por los números 0 y 1 es un cuerpo respecto de la operación $\dotplus$ definida en el Ejercicio 6 del Capítulo VIII y de la multiplicación.

18. Determinar dos operaciones con los números 0, 1 y 2, de manera que el conjunto de éstos constituya un cuerpo respecto de esas operaciones.

19. ¿Cómo se puede definir el símbolo «1» con ayuda de la multiplicación?

20. En base al Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ puede demostrarse el siguiente teorema:

$$\underset{x}{\mathsf{A}}[0 < x \rightarrow \underset{y}{\mathsf{E}}(x = y \cdot y)].$$

Admitiendo que dicho teorema estuviese ya demostrado, deducir con su ayuda, de los axiomas del Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$, la siguiente proposición:

$$\underset{x,y}{\mathsf{A}}[x < y \leftrightarrow (x \neq y \wedge \underset{z}{\mathsf{E}}[x + z \cdot z = y])].$$

¿Puede basarse en este teorema la observación que hicimos en la Sección 65 respecto a una posible reducción en el número de términos primitivos del Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$?

*21. Demostrar el Teorema T del Ejercicio 6 sobre la base del Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$. Compárese esta demostración con la que propusimos en el Ejercicio 6, con referencia al Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$; ¿cuál de estas dos demostraciones es más difícil y exige mayor conocimiento de conceptos lógicos?

Indicación: Para demostrar el Teorema T a partir del Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$, aplíquese el Axioma $15^{\dagger\dagger}$, reemplazando «y» por «$1 + 1$» y «z» por «y» (antes habrá que mostrar que $1+1$ es distinto de 0); así obtenemos un número y del que, con ayuda de los Axiomas $13^{\dagger\dagger}$, $17^{\dagger\dagger}$ y $19^{\dagger\dagger}$, puede mostrarse fácilmente que satisface la fórmula dada en el Teorema T.

*22. Deducir del Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ todos los axiomas del Sistema $\mathcal{U}^{\dagger}$.

Indicación: Para la deducción del Axioma $3^{\dagger}$ asúmase que el Teorema T del Ejercicio 6 estuviese ya demostrado en base al Sistema $\mathcal{U}^{\dagger\dagger}$ (véase el ejercicio anterior), y procédase a continuación de la misma manera que en el Ejercicio 7.

GUÍA BIBLIOGRÁFICA

En esta última sección recomendaremos al lector algunos libros que pueden ayudarlo a profundizar y ampliar los conocimientos adquiridos aquí. En nuestro campo la literatura se ha enriquecido considerablemente y, en particular, está bien provista de textos para cursos universitarios de diversos niveles. El autor no pretende estar familiarizado con toda la literatura relevante y reconoce plenamente que su apreciación de la literatura existente —sobre la cual ha basado la selección que se presenta más abajo— es a menudo altamente subjetiva y a veces accidental.

Al preparar esta guía bibliográfica hemos tratado de seleccionar trabajos que nos han parecido calificados para estudios independientes, omitiendo algunos libros que pueden ser usados con éxito como texto bajo la guía de un profesor. Una gran parte de nuestra lista consiste en libros de nivel introductorio o intermedio, cada uno de los cuales cubre una variedad considerablemente amplia de temas; pero también mencionamos, frecuentemente sin discusión, algunos trabajos avanzados y monografías especializadas. Aquellos libros considerados difíciles para principiantes están indicados por asteriscos.

Este libro es un trabajo de divulgación, cuya tercera edición —que ha dado lugar a la presente traducción castellana— estaba destinada principalmente a lectores de habla inglesa. Por lo tanto, a igualdad de condiciones, hemos dado preferencia a libros publicados en inglés[1]. En el caso de libros no escritos original-

[1] El único libro mencionado por el autor del que existe una versión castellana es *Elementos de lógica teórica* de D. HILBERT y W. ACKERMANN, publicado por Editorial Tecnos, S. A., Madrid, 1962, 213 páginas (cf. pág. 272). — (*O. C.* y *M. D.*)

mente en inglés y posteriormente traducidos a ese idioma, nos referiremos (con una excepción) a la traducción inglesa. En el caso de un libro con dos o más ediciones, referimos exclusivamente a la última edición aparecida.

Hemos intentado dividir los libros de esta guía en varios grupos, de acuerdo con su tema. El lector notará, sin embargo, de nuestras breves descripciones de estos libros, que la clasificación no es excluyente: varios trabajos pueden ser ubicados en más de un grupo.

A. Desarrollo sistemático de la lógica

Como se señaló en el prefacio, esta obra no contiene una presentación de la lógica como disciplina deductiva formalizada. La primera tarea para el lector que proyecta continuar sus estudios en este dominio es, naturalmente, familiarizarse con un desarrollo sistemático y estrictamente deductivo de, por lo menos, las partes más elementales y básicas de la lógica. Éstas son los llamados cálculo proposicional, teoría de los cuantificadores (también conocida como cálculo funcional de primer orden o restringido, o también como cálculo restringido de predicados), y la teoría de la identidad. Para esta tarea podemos recomendar los siguientes libros:

D. Hilbert y W. Ackermann, *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1950, XII + 172 páginas.

Además del desarrollo del cálculo proposicional y el cálculo restringido de predicados, el libro contiene una discusión de los problemas metodológicos más importantes de estas partes de la lógica. El último capítulo es una introducción a la lógica superior —un bosquejo del así llamado cálculo extendido de predicados, dentro del cual es posible formalizar las teorías de clases y de relaciones, y desarrollar la aritmética (cf. observaciones en las páginas 107-110). El libro es preciso e inteligible y puede servir como preparación para estudios más profundos en los campos de la lógica y la metodología.

A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. 1, Princeton University Press, Princeton, 1956, x + 376 páginas.

En este libro se discuten las mismas partes de la lógica que en el precedente. Sin embargo, la discusión es mucho más detallada, se presentan planteos alternativos cuando éstos son conocidos de la literatura, y se discute una mayor variedad de problemas metodológicos. La introducción contiene observaciones interesantes y agudas sobre algunas nociones pertinentes en la descripción y discusión de teorías formalizadas, tales como *nombre*, *denotación*, *significado*, *constante*, *variable*, etc. El libro está provisto de numerosos ejercicios interesantes y contiene muchas y valiosas referencias históricas. Un estudio sistemático de esta obra no es tarea fácil, pero el lector que ya haya adquirido una idea clara de las partes básicas de la lógica de un libro como el de HILBERT-ACKERMANN, encontrará en *Introduction to Logic*, de CHURCH, un medio excelente de explorar diversos tópicos en gran detalle. Es más, aprenderá a considerar este libro como una fuente casi enciclopédica de conocimientos en aquellas partes de la lógica cubiertas por él.

D. KALISH y R. MONTAGUE, *Logic. Techniques of Formal Reasoning*, Harcourt, Brace & World, Inc., Nueva York, 1964, x + 350 páginas.

De acuerdo a lo que los autores declaran en el prefacio, recomendamos este libro en primer lugar a aquellos lectores interesados, no tanto en la lógica como ciencia (y en los resultados metodológicos concernientes a ella), sino principalmente en la lógica como arte. Entendemos por lógica como arte la habilidad para construir deducciones formales, para traducir argumentos informales al formalismo lógico y de ese modo evaluar la corrección de esos argumentos. En todo el libro el énfasis está puesto en la transición de formalismo lógico a lenguaje ordinario y viceversa. El método de formalización lógica usado en este trabajo es una variante de los así llamados métodos de deducción natural; la adopción de este método ha sido motivada, aparentemente, por el deseo de hacer esta transición tan fácil y natural como sea posible. Dicho sea incidentalmente, este método difiere considerablemente del método «clásico» aplicado en los libros antes mencionados; aunque igualmente riguroso, el método de los autores puede no igualar al método «clásico» en simplicidad intrínseca y valor para la lógica como ciencia. En los últimos capítulos los autores se ocupan de las aplicaciones de la lógica a la formalización de algunos fragmentos de la matemática y discuten ciertos tópicos (tales como definiciones y operadores que ligan variables) relevantes para estas aplicaciones que son frecuentemente descuidados en textos de lógica.

El lector que desee estudiar partes avanzadas de la lógica (de algunas de las cuales los Capítulos IV y V de nuestro libro dan una idea superficial e inadecuada) puede obtener alguna

información introductoria en los libros de HILBERT-ACKERMANN y CHURCH. En las siguientes obras puede encontrarse una presentación mucho más extensa:

*R. CARNAP, *Introduction to Simbolic Logic and its Applications*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1958, XIV + 241 páginas.

El espectro de tópicos discutidos en este libro es muy amplio. Los sistemas de lógica esbozados en él incluyen las teorías de clases y relaciones y son esencialmente tan ricos como el sistema desarrollado en detalle en el trabajo de RUSSELL y WHITEHEAD discutido más abajo. Además, es extensamente analizada la importante distinción entre nociones sintácticas y semánticas que aparecen en la descripción de un sistema lógico, son discutidos los problemas generales que surgen en las aplicaciones de la lógica a otras ciencias, y se construyen sistemas axiomáticos para varias teorías matemáticas y fragmentos de ciencias empíricas. El énfasis está puesto fundamentalmente en un análisis de los conceptos y no tanto en un desarrollo deductivo de teorías o en una exposición de los resultados obtenidos. El estudio de este libro puede ofrecer dificultades debido a la presentación concisa y frecuentemente esquemática.

*A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, vol. 1, 1925, XLVI + 674 páginas; vol. 2, 1927, XXXI + 742 págs.; vol. 3, 1927, VIII + 491 páginas. (Algunas partes del volumen 1 han aparecido también en una edición no encuadernada bajo el título *Principia Mathematica to *56*, 1956, XLVI + 410 páginas.)

Esta obra, que ya ha sido citada varias veces en el transcurso del presente libro, aún es, indudablemente, el trabajo más representativo de la lógica moderna. Contiene una presentación sistemática y exhaustiva de un extenso sistema de lógica que constituye una base adecuada para los fundamentos de la matemática; sin embargo, el desarrollo no está a la altura de los estrictos requisitos de la metodología actual. El trabajo está preponderantemente escrito en lenguaje simbólico y su extensión es abrumadora. Aunque sólo sea por estas razones técnicas, dudaríamos de persuadir al lector intentar un estudio completo de esta obra (a menos que esté especialmente interesado en el desarrollo histórico de la lógica moderna). La lectura de las introducciones a los volúmenes I y II es, sin embargo, instructiva e inspiradora.

Para concluir, mencionamos dos monografías, cada una con un contenido especializado:

*J. B. Rosser y A. R. Turquette, *Many-valued Logics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952, 124 páginas. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)

J. H. Woodger, *The Technique of Theory Construction*, The University of Chicago Press, Chicago, 1939, VII + 81 págs. (International Encyclopedia of Unified Science, vol. 2, núm. 5.)

B. Teoría general de conjuntos

La teoría general de conjuntos —sea tratada como una parte de la lógica (bajo el nombre de teoría de clases y relaciones) o presentada como una disciplina matemática independiente— ocupa una posición excepcional en el dominio de la ciencia deductiva, ya que junto con la lógica elemental, forma la base para un desarrollo riguroso de casi toda otra teoría deductiva. Por lo tanto, será importante para el lector familiarizarse con las nociones y resultados de la teoría de conjuntos, y aprender cómo puede esta teoría ser desarrollada rigurosamente como una disciplina sistemática.

P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1960, VII + 104 págs. (The University Series in Undergraduate Mathematics.)

A pesar de la impresión que pueda provocar la palabra «ingenua» en su título, este pequeño libro contiene un desarrollo axiomático —inteligible y preciso— de los elementos de la teoría de conjuntos, aunque en muchos pasajes hubiera sido deseable un tratamiento menos esquemático del tema. El libro no es rico en contenido matemático; el conocimiento que brinda de la teoría de conjuntos no satisfará, probablemente, las necesidades de muchos matemáticos contemporáneos que se han especializado en alguna otra rama de la matemática como álgebra moderna o topología. Sin embargo, puede ser útil como introducción a la teoría general de conjuntos.

P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1960, XII + 265 págs. (The University Series in Undergraduate Mathematics.)

Recomendamos este libro como texto muy satisfactorio de nivel intermedio. Cubre más material que el libro de HALMOS. Si se ampliara el último capítulo, que trata del llamado axioma de elección, de modo que abarcara las implicaciones de este axioma en la aritmética de números cardinales como también en otras partes de la teoría de conjuntos, el libro llenaría amplias necesidades. En efecto, satisfaría plenamente la necesidad de todos aquellos lectores interesados en la teoría de conjuntos como herramienta indispensable para el desarrollo riguroso de otras teorías dentro y fuera de la matemática. La presentación es sistemática, precisa y clara.

W. V. QUINE, *Set Theory and its Logic.*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, 1963, xv + 359 páginas.

Este libro será útil principalmente para aquellos lectores que hayan estudiado los elementos de teoría de conjuntos en otros textos y estén interesados en la formalización y los fundamentos axiomáticos de esta teoría. En principio el libro sólo presupone conocimientos de las partes elementales de lógica (pero no de teoría de conjuntos); se discuten explícita aunque brevemente algunos problemas lógicos y metodológicos relativos al desarrollo de la teoría de conjuntos. Como existen muchos métodos incompatibles de formalizar y axiomatizar la teoría de conjuntos, el autor intenta desarrollar los primeros capítulos de ella sobre una base neutra o «casi neutra» con respecto a todos esos métodos. (Podría ponerse en discusión el éxito completo de este intento.) Más adelante se da cuenta de varias axiomatizaciones divergentes que se conocen.

*W. SIERPIŃSKI, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovia, 1958, 487 págs. (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematiczne, vol. 34.)

Esta obra presenta una exposición exhaustiva y completa hasta la fecha de los resultados obtenidos en las dos partes más fundamentales de la teoría de conjuntos: la teoría de la coordinabilidad de conjuntos y la de las relaciones de orden y buen orden. La presentación es rigurosa aunque no axiomática; para el lector que haya estudiado alguno de los libros mencionados más arriba, no resultará difícil reconstruir todo el desarrollo sobre una base axiomática. Un rasgo característico de la obra es una separación tajante entre los resultados obtenidos mediante el axioma de elección y aquellos establecidos sin hacer uso de este axioma; para muchos estudiosos de la teoría de conjuntos, el axioma de elección resulta el menos obvio de todos los axiomas usualmente adoptados en dicha teoría. El lector interesado en teoría de conjuntos como rama independiente de la matemática y que así desee estudiarla, hallará valiosa esta obra; las numerosas referencias bibliográficas facilitarán estudios posteriores.

Indicamos otros tres trabajos; los dos primeros son libros de nivel avanzado cuyo contenido está relacionado con los libros de SUPPES y QUINE, y el tercero es una monografía corta que contiene profundos resultados en la metamatemática de la teoría de conjuntos y ha ejercido gran influencia en investigaciones posteriores en este dominio:

*P. BERNAYS, *Axiomatic Set Theory*. Con una introducción histórica por A. A. FRAENKEL. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958, VIII + 226 págs. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)

*A. A. FRAENKEL y Y. BAR-HILLEL, *Foundations of Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958, x + 415 páginas (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)

*K. GODEL, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton University Press, Princeton, 1961, 66 págs. (Annals of Mathematics Studies, núm. 3.)

C. Fundamentos lógicos y conjuntistas de la aritmética

Al desarrollar una teoría deductiva presuponemos a menudo la teoría de conjuntos (junto a la lógica elemental y posiblemente otras teorías); aplicamos entonces el procedimiento descrito en la página 150 y siguientes, esto es, exhibimos los términos primitivos, formulamos los axiomas, etc. Sin embargo, en el caso de la aritmética —las teorías de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos— y de otras partes de la matemática construidas directamente a partir de la aritmética (como ser, toda la llamada matemática clásica, incluyendo el análisis y el álgebra clásicos) disponemos de otro método: estas disciplinas pueden ser construidas simplemente como partes de la teoría de conjuntos (o de un sistema extendido de lógica que incluya la teoría de clases y relaciones[1]).

[1] En la página 109 hemos afirmado que la aritmética puede ser desarrollada como parte de la lógica. Esto fue afirmado bajo la hipótesis de que la lógica no se restringe a sus partes elementales, el cálculo proposicional y la teoría de cuantificadores, sino que comprende también la teoría de clases y relaciones. De lo contrario el término «lógica» debe ser reemplazado en nuestra afirmación por el de «teoría de conjuntos».

Esto es, todas sus nociones pueden ser definidas en términos de nociones conjuntistas, y todos sus teoremas pueden ser derivados de estas definiciones junto con las leyes de la teoría de conjuntos. Recomendamos a los lectores interesados en este importante aspecto de la teoría de conjuntos (y de la lógica), los siguientes libros:

S. FEFERMAN, *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1964, XII + 418 págs. (Addison-Wesley Series in Mathematics.)

L. HENKIN, W. N. SMITH, V. J. VARINEAU, M. J. WALSH, *Retracing Elementary Mathematics*, The Macmillan Company, Nueva York, 1962, XVIII + 418 págs. (Allendoerfer Mathematics Series.)

Ambos libros contienen una presentación exhaustiva y plenamente satisfactoria del tema. Ambos dan una idea adecuada de los dos métodos para desarrollar la aritmética, con una salvedad: en el segundo libro la aritmética de los números naturales se desarrolla exclusivamente como una teoría axiomática y las construcciones posteriores se llevan a cabo dentro de la teoría de conjuntos enriquecida con esta aritmética. En general, el primer libro es de un nivel más avanzado, su presentación, aunque muy clara, es más concisa y formal, y su discusión incluye la aritmética de los números complejos y cubre varios tópicos de álgebra y análisis. En el segundo libro se observa un esfuerzo consciente para hacer la discusión fácilmente accesible a lectores sin entrenamiento avanzado (aun al precio de cometer algunas inexactitudes formales menores), la presentación está hecha en un estilo relacionado con el de la matemática de escuela secundaria, y el material discutido se restringe a la aritmética propiamente sin ir más allá de los números reales. El texto incluye un capítulo sobre teoría general de conjuntos que, a pesar de presentar solamente un pequeño fragmento del material básico, ofrece al principiante una idea clara del proceso histórico que llevó a la axiomatización de la teoría.

Como lectura adicional sugerimos un libro mucho más antiguo con la misma orientación, originalmente escrito en alemán, actualmente disponible en traducción inglesa:

G. FREGE, *The Foundations of Arithmetic. A Logico-Mathematical Enquiry into the Concept of Number*. (Texto inglés y alemán a doble página.) Philosophical Library, Inc., Nueva York, 1950, XII + 119 páginas.

Este libro (al que ya nos hemos referido en la nota 1 de la página 110 por su importancia histórica) fue publicado por primera vez en 1884, y es considerado actualmente un clásico. Está extraordinariamente bien escrito y contiene una estimulante presentación de las ideas básicas que subyacen en el desarrollo de la aritmética como parte de la teoría de clases.

D. Metodología de las ciencias deductivas (metalógica y metamatemática)

El término «metodología de las ciencias deductivas» se usa aquí en el sentido generalizado expuesto en la Sección 42, páginas 171 y subsiguientes. Para ser recomendable como texto satisfactorio de metodología a nivel introductorio o intermedio, un libro debería contener un desarrollo sistemático y fácilmente inteligible de los elementos de esta ciencia, a saber, definiciones precisas de las nociones metodológicas más importantes, formulaciones y derivaciones de teoremas que establezcan propiedades básicas de ellas, y aplicaciones de estas nociones y resultados metodológicos generales a teorías deductivas especiales. Además el desarrollo tendría que satisfacer los requisitos de rigor aplicados hoy día a toda ciencia deductiva. No conocemos ningún libro que satisfaga plenamente estas condiciones. Los trabajos que discutiremos o indicaremos aquí, o bien ofrecen una concepción restringida de la metodología, o son tratados de nivel avanzado; o finalmente, tienen el carácter de monografías que se ocupan de nociones metodológicas particulares.

*P. LORENZEN, *Metamathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962, 173 págs. (B. I. Hochschultaschenbücher, vol. 25.)

El autor presenta el material desde un punto de vista filosófico definido, que podría llamarse constructivismo metamatemático[1]. Este punto de vista elimina de la metamatemática muchas formas de inferencia normalmente usadas en lógica y matemática, a pesar de que las teorías tratadas en las discusiones metamatemáticas no están sujetas a tal limitación. Por consiguiente, algunas

[1] Este punto de vista está representado por algunos lógicos contemporáneos influidos por D. HILBERT, uno de los fundadores de la metamatemática.

partes de la metamatemática contemporánea no se discuten para nada en el libro de LORENZEN. (Esto se aplica en particular a la teoría de modelos, muchos de cuyos resultados dependen esencialmente del así llamado teorema de completicidad del cálculo de predicados.) Para el lector sin conocimiento previo del punto de vista constructivista, algunos de los argumentos de este libro podrían parecer indebidamente complicados, y algunas de las distinciones ininteligibles. Teniendo estas reservas en cuenta, el lector puede, sin embargo, encontrar en este pequeño libro una introducción estimulante e informativa a importantes sectores de la metamatemática. Con ayuda de este libro puede familiarizarse con el método de aritmetización de la metamatemática y con la importante noción de función recursiva; puede aprender cómo son usadas estas dos herramientas para establecer los profundos resultados de GÖDEL y CHURCH sobre incompletidad e indecidibilidad de la aritmética (que hemos mencionado en las págs. 168 y siguientes); y también puede obtener información sobre investigaciones relativas a la completidad y decidibilidad de algunas otras teorías deductivas, en particular del álgebra elemental. La presentación es clara en general; los argumentos son a veces demasiado concisos como para ser convincentes para un principiante.

S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, D. van Nostrand Company Inc., Nueva York, 1952, x + 550 págs. (University Series in Higher Mathematics.)

Éste es un extenso tratado de nivel avanzado, cuyo estudio requiere un serio esfuerzo por parte del lector. Sin embargo, esta obra no constituye una descripción exhaustiva de la metalógica y la metamatemática contemporáneas: su alcance se restringe a problemas metodológicos de la aritmética de números naturales y del cálculo de predicados. La Parte I contiene entre otros tópicos una discusión de algunas posiciones filosóficas importantes referentes a la lógica y la matemática, en particular del intuicionismo; en otras partes del libro, en particular en el último capítulo, puede encontrarse mucha información sobre sistemas lógicos que corresponden al punto de vista intuicionista y sobre resultados metalógicos relevantes. La mayor parte del material contenido en la Parte II («Lógica matemática») puede ya ser conocido por el lector a través de otras fuentes. La parte central del libro es la Parte III; contiene una exposición del método de aritmetización de la metamatemática, una extensa exposición de la teoría de funciones recursivas, y una derivación de los teoremas fundamentales sobre incompletidad e indecidibilidad de la aritmética. En la Parte IV, la última del libro, pueden encontrarse resultados metalógicos básicos sobre el cálculo de predicados y una discusión del problema de la consistencia de la aritmética.

*A. ROBINSON, *Complete Theories*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956, 129 págs. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)

*A. MOSTOWSKI, *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952, VIII + 117 págs. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)

*A. TARSKI, A. MOSTOWSKI y R. M. ROBINSON, *Undecidable Theories*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1953, XI + 98 págs. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)

E. Fundamentos axiomáticos de teorías matemáticas particulares

El lector que haya estudiado la segunda parte de nuestro libro puede desear aprender más acerca de los temas allí discutidos. Puede desear, por ejemplo, familiarizarse con otros ejemplos de teorías axiomáticas, estudiar más profundamente los problemas metodológicos relacionados con el proceso de axiomatización, o ver una presentación más detallada de los tópicos discutidos en el último capítulo. Encontrará mucho material relevante en varios libros mencionados en **A**, **B** y **C**. Como lecturas adicionales sugerimos dos monografías más antiguas que la mayoría de los otros libros de nuestra lista, pero que de ninguna manera están pasadas de moda y pueden ser todavía interesantes y estimulantes:

E. V. HUNTINGTON, *The Fundamental Propositions of Algebra*. Monograph IV (págs. 151-207) en *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*, editado por J. W. A. YOUNG, con una introducción de M. KLINE, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1955, XVI + 416 páginas.

Recomendamos este trabajo (publicado por primera vez en 1914) a aquellos lectores interesados en las consideraciones contenidas en los dos últimos capítulos de nuestro libro. Encontrarán en él una presentación simple, precisa y clara de los resultados de las investigaciones metodológicas en los fundamentos axiomáticos de la aritmética de números reales y complejos.

J. W. YOUNG, *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, Macmillan Co., Nueva York, 1930, VII + 247 páginas.

Este pequeño y muy informativo trabajo, contiene muchas e interesantes discusiones y ejemplos del dominio de la metodología de la matemática.

Un trabajo de carácter completamente distinto es:

*D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*. Con revisiones y apéndices de P. BERNAYS. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1956, VII + 251 págs. Hay también una traducción inglesa de una antigua edición alemana: *The Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1902, VII + 143 páginas.

Hemos hecho referencia a este libro en la nota 1 de la página 152. Fue publicado por primera vez en 1899, y varias de las ediciones subsiguientes fueron complementadas con referencias a algunos desarrollos posteriores. El libro ha tenido una influencia decisiva en investigaciones sobre los fundamentos axiomáticos de la geometría y aún hoy los especialistas en este campo lo estudian con especial atención. Al leerse este libro debe tenerse en cuenta que no ha sido escrito para personas interesadas principalmente en los aspectos metodológicos del proceso de axiomatización.

F. Historia de la lógica

Puede encontrarse material histórico valioso en varios de los libros antes discutidos o mencionados, que no están específicamente dedicados a la historia de la lógica. Esto también se aplica al siguiente libro:

C. I. LEWIS, *A Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Berkeley, 1918, VI + 406 páginas.

Sugerimos muy especialmente la parte histórica de este libro, ya que ofrece abundante información interesante e instructiva sobre el desarrollo de la lógica moderna. El resto de este libro está fuera de época.

Los dos trabajos siguientes tratan exclusivamente de historia de la lógica:

H. SCHOLZ, *Concise History of Logic*, Philosophical Library, Inc., Nueva York, 1961, 140 páginas.

Tenemos aquí un breve esbozo histórico del desarrollo de la lógica hasta el presente. La creencia en el papel trascendental de la lógica matemática contemporánea emana de cada página de este libro; el estilo vivaz y colorido hará de él una lectura atractiva aun para el lego.

*I. M. BOCHENSKI, *A History of Formal Logic*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1961, XXII + 567 páginas.

Éste es un tratado comprensivo de historia de la lógica, tanto tradicional como moderna, que incluye temas raramente expuestos, como, por ejemplo, la historia de la lógica hindú. Puede ser especialmente útil para los estudiosos de historia de la lógica, ya que contiene una extensa colección de traducciones inglesas de pasajes de textos originales.

Puede ser importante para los lectores interesados en la historia de la lógica saber que varios de los trabajos citados en este libro por su significación histórica, son ahora fácilmente accesibles en nuevas ediciones y, en algunos casos, en traducciones inglesas. Éste es el caso, en particular, de los trabajos de FREGE y HILBERT mencionados en **C** y **E**. Mencionamos además:

G. BOOLE, *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1951, V + IV + 424 páginas.

G. Filosofía de la lógica y la matemática

En este libro hemos tenido escasa oportunidad de discutir problemas concernientes a la lógica y a los fundamentos de la matemática usualmente considerados como filosóficos (por ejemplo, el problema de la verdad de los axiomas de la lógica y la matemática, o el de la existencia de clases y relaciones). Tales pro-

blemas, sin embargo, han preocupado a muchos estudiosos y no son, de manera alguna, irrelevantes para el desarrollo de la lógica. Un punto de vista filosófico adoptado por un lógico puede influir decididamente su elección de temas de estudio, sus métodos de investigación y su apreciación de los resultados obtenidos por él y otros. Recomendamos al lector que desee una orientación general sobre desarrollos en la filosofía de la lógica y la matemática, los siguientes dos libros —el primero de ellos una antología, y el segundo un extenso trabajo que cubre un amplio espectro de temas:

P. BENACERRAF y H. PUTNAM, editores, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. (Con una introducción de los editores.) Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1964, VII + 536 págs. (Prentice-Hall Philosophy Series.)

*E. W. BETH, *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959, XXVI + 741 págs. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)[1]

Hemos clasificado este libro como filosófico, ya que, como el autor afirma en el prefacio, uno de sus motivos principales al escribirlo fue «el deseo de estrechar lazos entre investigación en fundamentos y filosofía general, y proporcionar tanto a filósofos como a matemáticos una amplia presentación de problemas y resultados con comentarios tales que ayuden a mostrar su importancia filosófica». No se podrá encontrar en esta obra ninguna presentación sistemática de resultados u opiniones, lo que hace difícil recomendarlo para un estudio sistemático. Contiene, sin embargo, vasta información sobre todo el dominio de que nos hemos interesado (incluyendo una extensa bibliografía de treinta páginas). Todo aquel que esté interesado en un problema particular puede consultar esta obra con la esperanza de encontrar en ella, a falta de una explicación adecuada, por lo menos algunas referencias bibliográficas, algunas observaciones históricas pertinentes, o alguna discusión sobre las implicaciones filosóficas.

Mencionamos, finalmente, una monografía especializada que puede ser incluida en **A** o en **G**:

---

[1] Una edición no encuadernada de esta obra ha sido recientemente publicada por Harper & Row, Publishers, Nueva York, 1966. (Harper Torchbooks, The Science Library). *(N. del T.)*

A. Heyting, *Intuitionism. An introduction*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956, VIII + 132 págs. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)

Para concluir, deseamos mencionar que existe una sociedad internacional, *The Association for Symbolic Logic*, que reúne la mayoría de los investigadores científicos en los campos de la lógica y la metodología de la matemática. Esta institución tiene su publicación trimestral, *The Journal of Symbolic Logic*, que contiene contribuciones originales, como también reseñas críticas de toda la literatura actual en el campo de la lógica. El volumen 1, 1936, contiene una bibliografía exhaustiva (complementada sustancialmente en el volumen 3, 1938, con agregados menores en volúmenes posteriores), compilada por Church, de todas las publicaciones en el dominio de la lógica matemática hasta el año 1935; un índice de la literatura publicada posteriormente aparece cada dos años. Una contribución ulterior a la bibliografía de la lógica es el volumen 26, 1961, que contiene índices que abarcan todo el material de los veinticinco volúmenes precedentes. Existen también otros periódicos, como también colecciones de libros dedicadas exclusivamente a las publicaciones sobre lógica y metodología. Mencionaremos específicamente la serie *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam), en la que, antes de 1964, ya habían sido publicados unos cuarenta libros, en su mayoría monografías especializadas, pero también unas pocas obras de carácter más general.

La Association for Symbolic Logic realiza dos o tres reuniones anuales en los Estados Unidos y otros países. Cada pocos años se realiza un Congreso Internacional de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia; el primero de ellos tuvo lugar en 1960. Frecuentemente se realizan simposios dedicados a problemas o ramas especiales de la investigación lógica. Las actas de estos congresos y simposios, a menudo publicadas como libros separados, son fuentes valiosas de información sobre los desarrollos más recientes en este campo.



Impreso en España
Printed in Spain